

Carré et triangle de même aire

Énoncé

On considère un carré ABCD de côté 1 cm. M est un point mobile sur le segment [AB]. On mène par M la perpendiculaire à (AB). Elle coupe la droite (AC) en F et la droite (DC) en G.

H est le point du segment [AD] tel que AMFH est un carré.

L'objectif de cet exercice est de conjecturer, puis de démontrer la position du point M pour que les aires du carré AMFH et du triangle FGC soient égales.

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,

a) faire la figure de l'énoncé ci-dessus.

Appeler l'examineur pour une vérification de la figure.

- b) Créer le point P d'abscisse la longueur AM et d'ordonnée l'aire du carré AMFH et le point Q d'abscisse la longueur AM et d'ordonnée l'aire du triangle FGC. Faire apparaître la trace de P et de Q lorsque M se déplace sur le segment [AB] et conjecturer la position du point M pour que l'aire du triangle AMFH soit égale à l'aire du triangle FGC.

Appeler l'examineur pour une vérification de la construction et de la conjecture.

Partie démonstration

2. Démontrer la conjecture de la façon suivante :

a) Poser x = longueur AM. Exprimer l'aire du carré AMFH en fonction de x et l'aire du triangle FGC en fonction de x .

Appeler l'examineur pour une vérification de votre réponse.

b) Prouver que l'égalité des aires peut se simplifier par l'équation : $2x^2 = x^2 - 2x + 1$ (E).

c) Prouver que l'équation équivalente à (E) est : $x^2 + 2x - 1 = 0$ puis $(x+1)^2 - 2 = 0$.

d) Factoriser $(x+1)^2 - 2$ puis résoudre $(x+1)^2 - 2 = 0$.

Appeler l'examineur pour une vérification de votre réponse.

e) Quelle est la valeur exacte de x pour que les deux aires soient égales? Correspond-elle au résultat obtenu par le logiciel?

Appeler l'examineur pour une vérification de votre réponse.

Production demandée

Construction d'une figure dynamique permettant de réaliser une conjecture sur la position de M.

Mise en équation du problème.

Résolution de l'équation de la question 2d).

D'après un sujet de l'épreuve pratique de 2de 2010 – Académie de la Guyane.