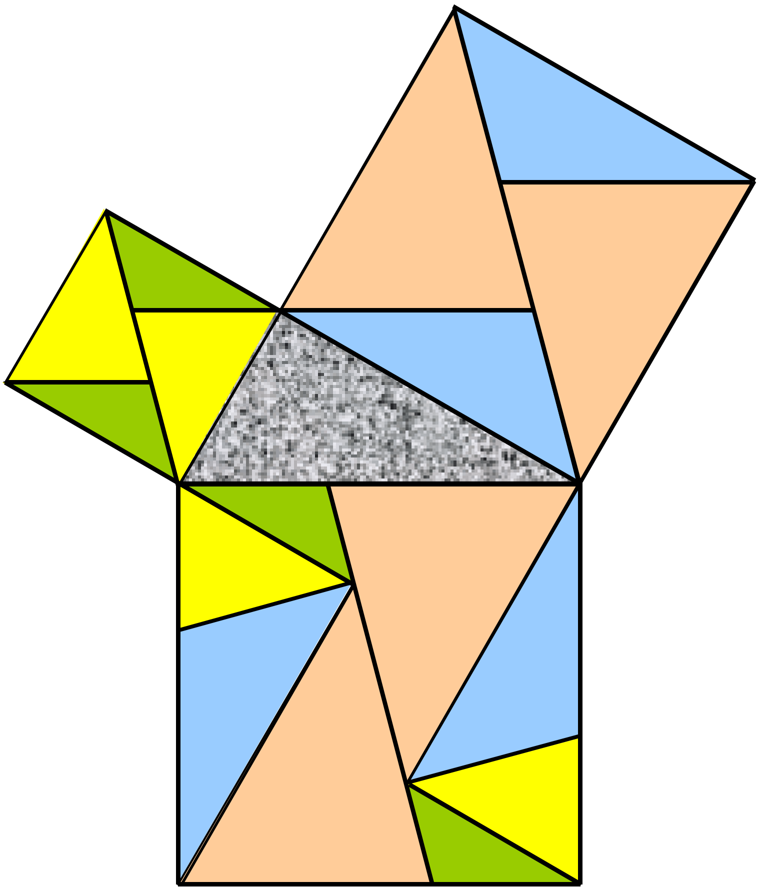
Aire et Périmètre



**Dossier d'activités pédagogiques
réalisé par
le groupe national de réflexion
sur l'enseignement des mathématiques
en dispositifs relais.**

Aire et Périmètre

Dossier d'activités pédagogiques réalisé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais.

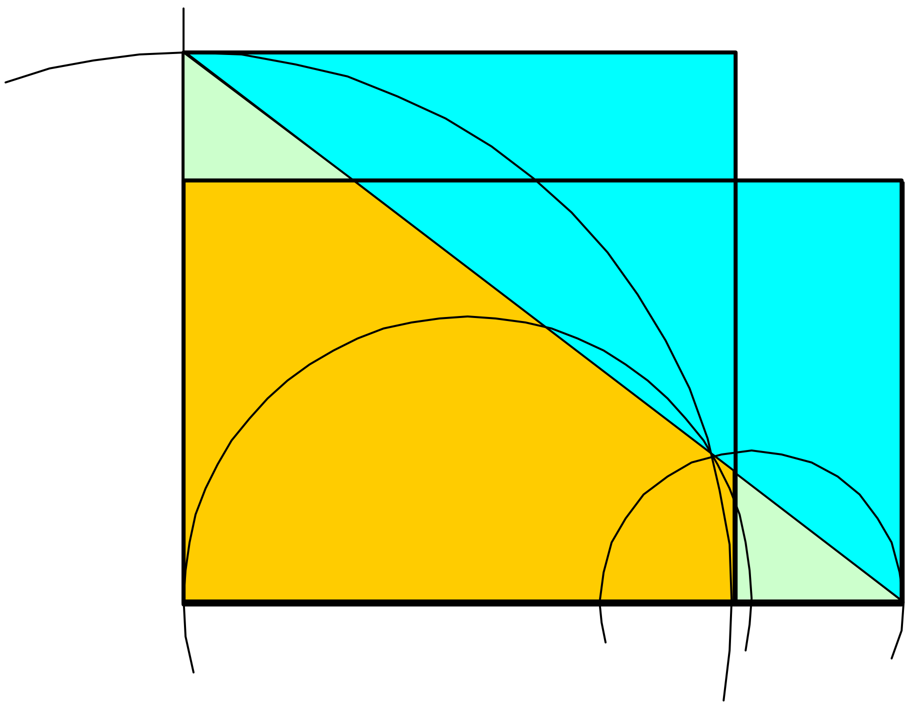
La philosophie des dispositifs relais est la suivante : quels que soient les degrés de difficulté des élèves concernés, quels que soient leurs échecs, leurs rechutes, le découragement des enseignants, nous ne devons pas baisser les bras, nous ne devons pas abandonner ces élèves, nous en sommes collectivement responsables et nous devons tout mettre en œuvre pour les aider.

Le présent travail, fruit d'une collaboration entre la direction de la protection judiciaire de la jeunesse et la direction de l'enseignement scolaire s'inscrit dans cette perspective, c'est une nouvelle initiative pour tenter de donner aux enseignants les outils d'une réponse adaptée en mathématiques. Cette première publication, qui sera suivie d'autres, porte naturellement sur des travaux géométriques. Il y a là historiquement et culturellement la base d'un savoir construit en mathématiques, mettant en œuvre des notions simples autour de situations concrètes, parfois ludiques, groupées autour d'idées propres à éveiller l'intelligence et à soutenir la motivation.

L'utilisation des documents pédagogiques proposés par cette publication pourra tirer un grand profit de la lecture de l'introduction et des deux articles convergents et complémentaires qu'elle contient. Ils doivent permettre aux enseignants de déterminer les parcours adaptés aux besoins de leurs élèves. Il ne faut pas chercher à tout couvrir ni à tout mettre en œuvre, mais on n'oubliera pas que tout authentique apprentissage exige des reprises et du temps.

Je souhaite pour cette noble tâche bonne chance et belle réussite aux enseignants avec les élèves qu'ils accueillent.

Dominique **ROUX**, Inspecteur général de l'éducation nationale de mathématiques



PREAMBULE

Les dispositifs relais permettent un accueil temporaire adapté de collégiens en risque de marginalisation scolaire. Ils ont pour objectif de favoriser le réinvestissement des apprentissages et la socialisation de ces élèves.

Conformément aux principes exposés dans le document « Enseigner et Apprendre en classe relais »[1], qui affirme qu'il n'y a pas socialisation sans apprentissages, la direction de l'enseignement scolaire et la direction de la protection judiciaire de la jeunesse ont mis en place des groupes de réflexion nationaux thématiques sur l'enseignement du français, des mathématiques, des sciences et de la technologie. Ce dossier est la première production du groupe « Mathématiques ». Un second dossier axé sur le thème du numérique et de l'opératoire est en cours d'élaboration.

Le choix du thème Aire et Périmètre se justifie par plusieurs considérations :

1- Ce thème traverse l'histoire des mathématiques (Cf. les articles de François Boule et André Pressiat) ;
2- Il constitue un noyau dur des savoirs mathématiques à acquérir au collège ;
3- Il est particulièrement adapté à la mise en place d'une pédagogie différenciée permettant de mobiliser l'ensemble des élèves d'un dispositif, quel que soit leur niveau de compétences.

Les activités proposées, issues de pratiques expérimentées, permettent le développement d'une pédagogie ambitieuse, osant offrir des activités complexes, souvent originales, mais clairement référées aux connaissances fondamentales à acquérir au collège.

L'outil qui vous est proposé suppose probablement des actions de formation qui pourront être mises en place dans les académies.

L'utilisation de ce dossier n'est a priori pas limitée aux seuls professionnels des classes relais. Il est permis de penser que les démarches, ici préconisées, seraient utiles à tous les adolescents.

En tout état de cause, vos réflexions et contributions sur leur mise en œuvre seront bienvenues.

ONT COLLABORE A LA REALISATION DE CE DOSSIER

M. Dominique Barataud, professeur de mathématiques, CNEFEI Suresnes
M. François Boule, professeur de mathématiques, CNEFEI Suresnes
M. Jean-Marie Bouscasse, professeur de mathématiques, Agen
Mme Dominique Brossier, direction de la protection judiciaire de la jeunesse
M. Robert Charbonnier, professeur de mathématiques, Maringues ; IREM de Clermont-Ferrand
Mme Régine Fourmann, direction de l'enseignement scolaire
M. Lionel Maurouard, professeur de mathématiques, Fécamp
M. Aziz Ouldali, enseignant de mathématiques, Auto-Ecole Saint-Denis
Mme Jacqueline Puyalet, professeure de mathématiques, CNEFEI Suresnes
Mme Jacqueline Penninckx, inspectrice d'académie, inspectrice pédagogique régionale de mathématiques;
M. André Pressiat, professeur de mathématiques, Châteauroux ; INRP
M. Dominique Roux, inspecteur général de l'Education Nationale de mathématiques

[1] Ce document fait l'objet d'une publication séparée.

Ce dossier Aire et Périmètre est disponible sur le site :

http:\\www.eduscol.education.fr (Rubrique Collège, sous rubrique Dispositifs relais)
ou
http:\\www.inrp.fr   (Rubrique Education prioritaire, sous rubrique Dispositifs relais)

Organisation générale du dossier Aire et Périmètre téléchargeable

Nom du fichier[1]	Contenus
Couverture.PDF	- Présentation du dossier par Monsieur Dominique ROUX, Inspecteur Général de Mathématiques. - Préambule - Liste des membres du groupe national ayant collaboré à ce dossier
Introduction.PDF	Présentation argumentée de l'ensemble des activités proposées par Dominique BARATAUD (Professeur au CNEFEI)
Boule.PDF	Article de François BOULE (Professeur au CNEFEI) **Découpages et recomposition de surfaces,** qui devrait permettre à tous de comprendre en quoi ces questions sont essentielles
Pressiat.PDF	Article de André PRESSIAT (I.N.R.P.), **Découpages et recompositions pour les aires et volumes,** nécessitant sans doute quelques connaissances préalables et permettant d'explorer rapidement l'histoire des mathématiques sur ce sujet.
Tableau-général.PDF	Tableau synoptique de l'ensemble des activités proposées
Bibliographies.PDF	Bibliographies
	Ce dossier contient l'ensemble des fichiers présentés dans le Tableau général. Les fiches de travail sont dénommées : **Activité** suivi de leur N°. et du suffixe **élv** Les fiches pédagogiques d'accompagnement sont dénommées : **Activité** suivi de leur N°. et du suffixe **prof**

[1] Tous ces fichiers étant au format .PDF sont lisibles, imprimables, mais non modifiables.

Aire et Périmètre

Dominique BARATAUD (C.N.E.F.E.I)

Introduction : Une question délicate

Tout enseignant de mathématiques a rencontré des apprenants en difficulté dans l'utilisation des formules de calculs de périmètres ou/et d'aires. Et il est classique de voir une personne utiliser une formule de calcul d'aire pour trouver un périmètre (et réciproquement) ou exprimer une aire en m (ou un périmètre en mètres carrés.

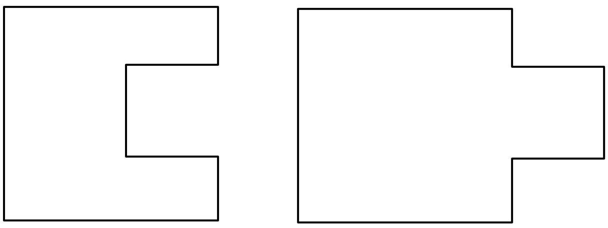
Ces erreurs trouvent probablement leur origine dans des confusions s'appuyant sur des perceptions erronées et des représentations archaïques que la pédagogie ne prend peut-être pas suffisamment le temps d'explorer.

Précisons, à partir de quelques exemples, le sens de notre propos.

Notre expérience empirique nous conduit à **confondre** (au sens étymologique) les concepts de Périmètre, de Aire (et même de volume). En effet, dans la plupart des manipulations que nous réalisons sur des objets, ces trois grandeurs croissent (ou décroissent) conjointement. Ainsi, plus un paquet-cadeau est gros (volume) , plus le papier-cadeau pour l'envelopper est grand (Aire) et plus le ruban nécessaire à l'entourer sera long (Périmètre). Intuitivement, nous avons tendance à penser (souvent inconsciemment) que si nous augmentons une surface, le nouveau périmètre augmente aussi (et réciproquement).

Il y a donc une confusion profondément enracinée dans notre expérience empirique d'actions sur le monde ou dans les perceptions immédiates sur certaines figures.

Ainsi dans le cas suivant :



Face aux deux figures ci-contre, la plupart des personnes interrogées considèrent que celle de droite a un périmètre supérieur à celui de la figure de gauche.
Ce qui est faux (les deux périmètres sont égaux).

Commentaires :

La figure de gauche est perçue comme un grand carré amputé d'un petit carré, alors que celle de droite est perçue comme un grand carré augmenté d'un petit. Ce qui est exact en terme de décomposition et recomposition. Ce qui est erroné, **c'est le mouvement de pensée qui traduit cette perception en opération** (soustraction ou addition) sur les deux grandeurs périmètre et aire. Car il est vrai qu'à l'addition perceptive des deux formes correspond l'addition des aires mais il n'en est pas de même au niveau des périmètres.

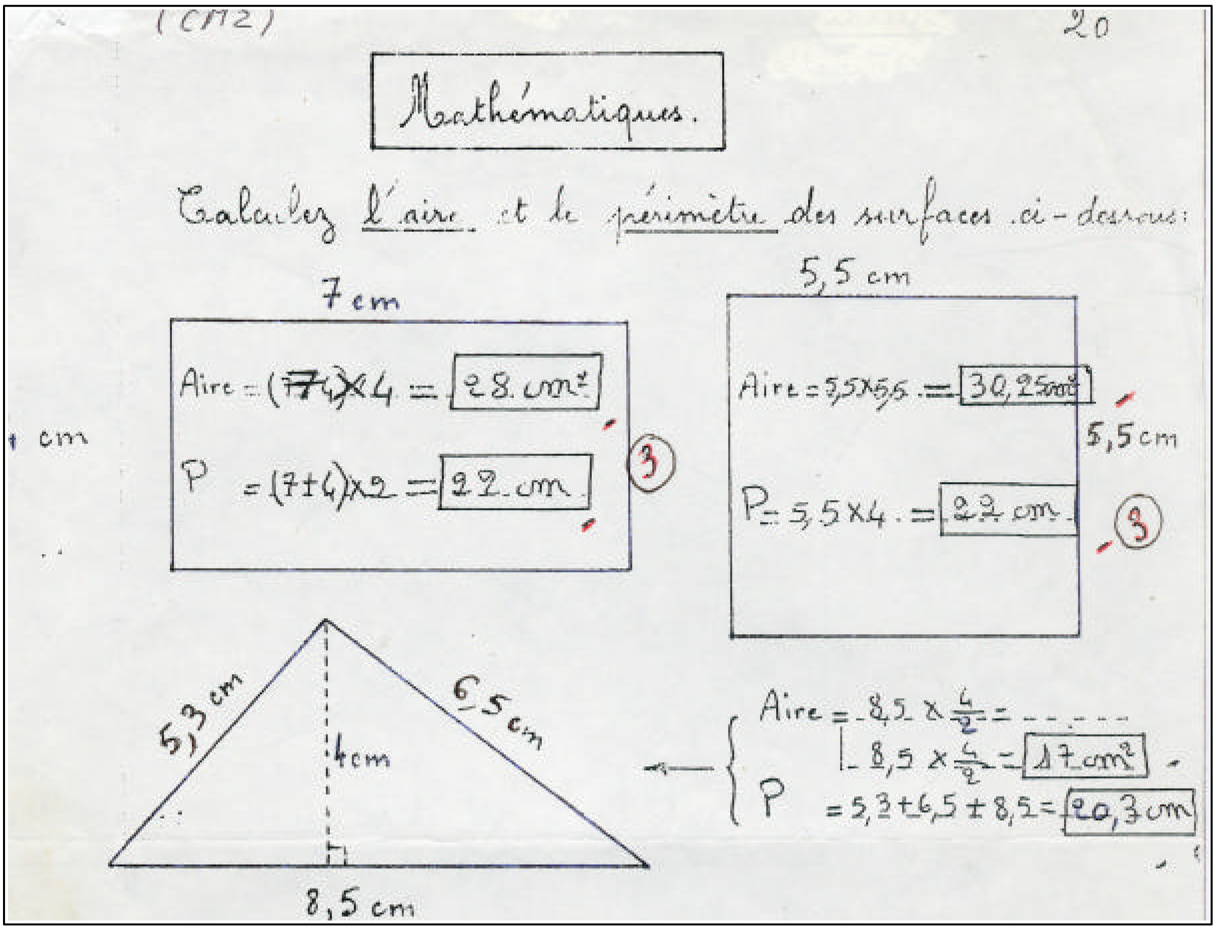
Il faut remarquer que cette "logique" conduit certains sujets à proposer comme calcul du périmètre de la première forme une opération du type :

Périmètre du grand carré – périmètre du petit

et comme calcul du périmètre de la seconde forme une opération du type :

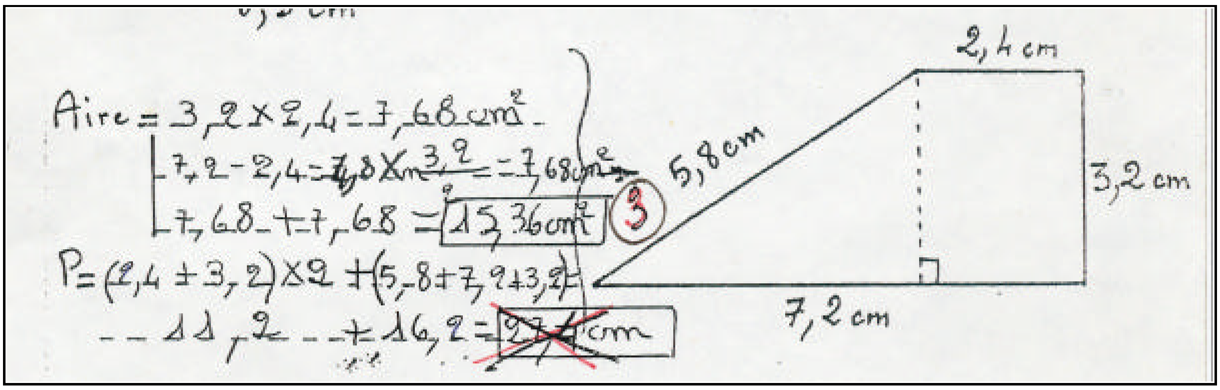
Périmètre du grand carré + périmètre du petit.

Voici par exemple le travail réalisé par une élève de CM2.



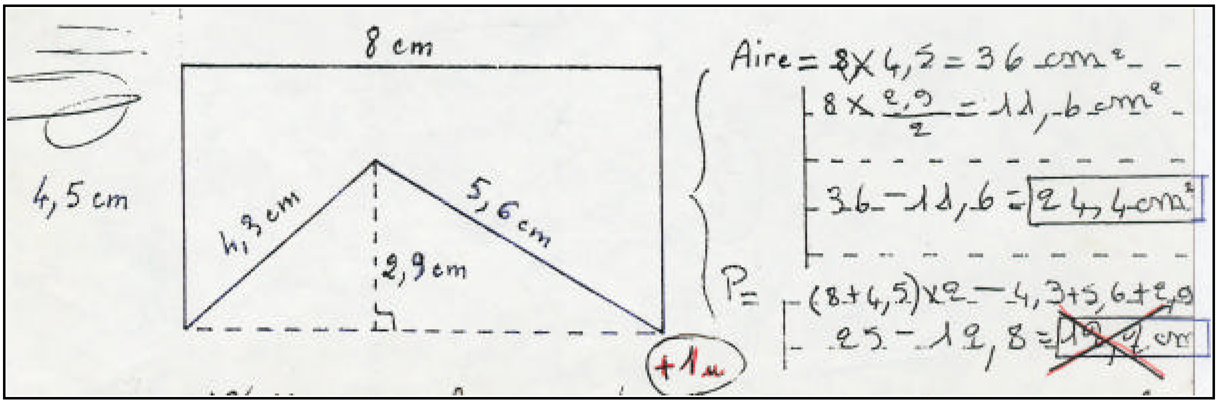
Remarque :
Sur les formes canoniques (Rectangle, Carré et Triangle) la maîtrise de cette élève semble totale.

Suite de son travail :



Remarque :
Face à une figure composée et pensée comme l'adjonction d'un rectangle et d'un triangle, le mode de calcul apparaît comme étant du type :
Aire totale = aire du rectangle + aire du triangle
Périmètre total = périmètre du rectangle + périmètre du triangle.

La dernière partie de son travail est encore plus exemplaire :



Remarque :
Ici la figure est pensée comme étant celle d'un rectangle amputé d'un triangle.
Le mode de calcul du périmètre, que nous reproduisons, mérite d'être analysé.

Traduction opératoire de l'amputation perceptive

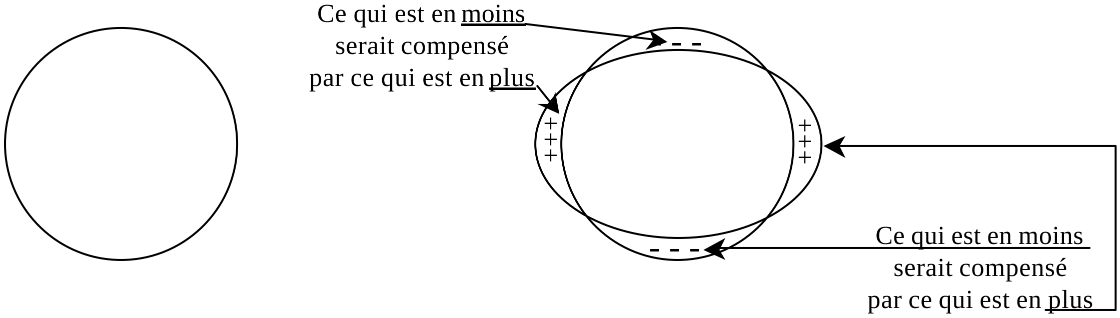
P = (8 + 4,5) x2 – 4,3 + 5,6 + 2,9

25 – 12,8 = 12,2 cm

Somme des éléments caractéristiques de l'amputation. (Il s'agit bien d'une somme ainsi que le prouve le 12,8 de la ligne suivante). Le 2,9 qui ne correspond pas au périmètre du triangle, représente la profondeur, l'importance de l'amputation.

On voit ici à nu **le mouvement de pensée qui traduit la perception en opération.**

Corrélativement, à périmètre constant, nous avons tendance à penser que l'aire ne change pas.
Ainsi, Voltaire (qui n'était pas particulièrement en difficulté d'apprentissage) écrivait :
"La surface d'un cercle ne change pas quand on le transforme en ovale".
Cette erreur (car c'est faux), s'appuie sur des compétences opératoires de haut niveau (Invariance par compensation) qu'un schéma permet de comprendre



Découper, recomposer, une activité authentiquement mathématique.

On le verra, les scénarios pédagogiques que nous proposons dans ce dossier font beaucoup appel à des découpages et à des recompositions de surfaces. La justification de telles pratiques n'est pas à chercher dans des caractéristiques supposées des élèves accueillis en classes-relais mais du côté de l'histoire et des fondements mêmes des mathématiques.

D'Euclide à Hilbert, toute l'histoire de la géométrie démontre l'importance que ces démarches ont occupée (et occupent encore) dans les recherches des plus éminents mathématiciens. Elles ne sont pas le moyen d'échapper à des processus d'abstraction mais sont au contraire au cœur d'interrogations et de recherches fondamentales.

Ainsi, par exemple, la question de la quadrature du cercle (Est-il possible de construire, à la règle et au compas, un carré de même aire qu'un cercle donné ?) fut posée par les Grecs et ne trouva sa solution qu'au 18ème siècle. (La réponse étant qu'une telle construction est impossible). Il en est de même de la construction de la trisectrice d'un angle (partage d'un angle en trois parties égales).

On trouvera dans ce dossier deux articles de niveau différent auxquels le collègue, selon ses propres besoins et connaissances antérieures se reportera :

- Un premier article de notre collègue André PRESSIAT (I.N.R.P.), **Découpages et recompositions pour les aires et volumes,** nécessitant sans doute quelques connaissances préalables et permettant d'explorer un peu l'histoire en mathématiques sur ce sujet.
- Un second article de notre collègue François BOULE (professeur au CNEFEI) **Découpages et recomposition de surfaces,** qui devrait permettre à tous de comprendre en quoi ces questions sont essentielles.

Les étapes de l'apprentissage

Remarque préalable :

Apprentissage initial et apprentissage tardif.

Les étapes décrites ci-dessous sont celles que devraient respecter une démarche d'apprentissage cohérente, ce sont celles qu'auraient dû respecter l'apprentissage initial. Or, il est fort probable que tel n'aura pas été le cas pour la plupart des élèves accueillis en classe-relais, leurs savoirs actuels s'étant construits de façon morcelée et peu cohérente. Il n'en demeure pas moins qu'ils ont des savoirs et qu'il n'est ni possible ni souhaitable de re-parcourir la totalité des étapes ci-dessous décrites. Une pédagogie des apprentissages tardifs doit prendre en compte les savoirs et représentations installés en permettant leur réorganisation et leur reconstruction. Certaines activités visant la construction de savoir dans le cadre d'un apprentissage initial peuvent permettre des prises de conscience et des réorganisations des connaissances propres à une pédagogie des apprentissages tardifs. Il appartient au professeur de choisir les activités pour permettre les acquisitions ou/et les réorganisations dont a besoin l'élève accueilli en classe-relais.

Dissociation des concepts :

Tout apprentissage doit donc, à notre sens commencer par un travail de dissociation des concepts. Ce qui suppose d'explorer des situations où :

- à périmètre constant les aires vont varier (et dans quelles limites),

- à aire constante, les périmètres vont varier (et dans quelles limites)

- le périmètre et l'aire vont varier dans le même sens (ce qui n'est pas surprenant) mais aussi en sens contraire (ce qui est moins conforme à l'intuition).

Voici sous forme d'un tableau l'ensemble des questions à parcourir.

Nature des variations	Périmètre	Constant		+	-	-	+	+	-
	Aire	+	-	Constante		-	+	-	+
Nature des activités		Travail avec de la ficelle		Assemblages d'un nombre constant de pièces. (Cf. Tan Gram)		Variations conjointes		Variations contraires	
		Aire variable		Périmètre variable		Retrait	Rajout	Retrait	Rajout
		Maxi.	Mini.	Maxi.	Mini.	de pièces		de convexités	

Comparer ou/et mesurer

Etudier les variations des périmètres et des aires lors de transformations particulières pose la question des procédures de comparaisons. Le recours trop rapide à des démarches faisant appel aux mesures risque de ne pas favoriser le travail de dissociation des concepts. Il est donc souhaitable, si cela semble nécessaire, de recourir à des procédures de comparaison qui ne fassent pas appel à la mesure.
Pour les périmètres : l'utilisation de ficelles peut permettre facilement des comparaisons directes.
Pour les surfaces, la comparaison directe des aires est plus délicate. Deux cas sont à envisager :

1) Le recouvrement d'une surface par l'autre est possible ;
2) Le recouvrement direct n'est pas possible. Des découpages et des réorganisations sont nécessaires. Ceci suppose que l'idée même d'invariance par découpage et réorganisation des pièces est acquise (Ce qui n'a rien d'évident pour tous les élèves de collège)

On trouvera dans la partie présentant les activités (Fiche 3) , un exemple de fiches qui ont pu être expérimentées avec des élèves de 6ème de SEGPA. Elles sont à comprendre comme le résultat d'un travail à réaliser et non pas comme des fiches toutes prêtes à distribuer.
Remarque :
L'intérêt d'un jeu comme le Tan Gram, c'est entre autre le fait que le découpage se fait à partir d'une pièce de base engendrant toutes les autres (Le petit triangle isocèle rectangle), ce qui permet, par simple dénombrement, des comparaisons d'aires.

Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	**Nature de l'activité**
1	Dissociation des concepts d'aire et de périmètre	Comparaison de figures selon chacun des critères. Prise de conscience que le classement de la plus petite à la plus grande d'un ensemble de figures dépend du critère retenu
2		Travail à périmètre constant : comparaison selon leur aire de figures ayant même périmètre
3		Travail à aire constante : comparaison selon leur périmètre de figures ayant même aire (Tan Gram)
Evaluation 1		

La question de la mesure

Autant le problème de la mesure des périmètres ne pose que peu de difficultés, autant celui de la mesure des aires est délicat. Plusieurs aspects peuvent être identifiés

L'utilisation d'une unité de mesure :

- Elle doit permettre de couvrir le plan. D'où les activités de pavage :
  - Recherche des formes usuelles permettant le pavage
  - Production, par transformations simples, de pièces originales

Remarquons que ce thème permet des liens intéressants avec le domaine pictural. (Cf. certains tableaux d'Escher)

> Remarques : Exhiber est une chose, exiger en est une autre.
> Or, l'une des formes que les enfants ont tendance à choisir spontanément pour couvrir une surface est le cercle. C'est du reste en s'appuyant sur ce constat que nous proposons certaines activités visant **une approche** de la notion de mesure des surfaces par le remplissage par des cercles. (Cf. Fiche N° 2) Cette méthode permet dans la plupart des cas de comparer les surfaces. L'existence de vides et de cercles n'entrant pas entièrement dans la forme permet justement de faire l'expérience des limites d'une telle approche.
> Il ne suffit donc pas d'exhiber le carré comme la forme exigée. Il faut fonder cette exigence en multipliant les expériences s'appuyant sur d'autres formes.

- Elle doit permettre le remplissage des surfaces à mesurer :
  - ce qui pose la question des transformations des figures usuelles en une forme de base,
  - ce qui pose aussi la question des sous-unités de mesure.

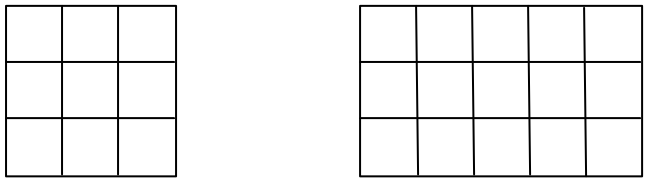
Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	Nature de l'activité
4	Approche des notions de mesure d'aires et de périmètres	Expression des caractéristiques des pièces constituant un Tan gram à partir de celles du triangle de base.
5		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures. (Cas simples)
6		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures. (Cas complexes)
7a 7b 7c 7d 7e	Vers la construction de formules Travail sur des « planches à clous »	Inventaire des carrés et des rectangles (planche à 9 clous puis à 16 clous) Inventaire des triangles (planche à 9 clous) et des polygones réguliers (maillage Triangle-Equilatéral) Expression de différentes formes (Triangles, carrés, parallélogrammes) à partir de 2 triangles de base Mesure d'aires sur une planche à 16 clous Construction de la formule de Pick
8a 8b 8c 8d 8e	Prise de conscience que la variation des aires est égale au carré de celles des longueurs	Carrés de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires Triangles équilatéraux de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires Sphinx de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires Découpage d'un sphinx en 16 sphinx Assemblage d'un sphinx avec 25 sphinx
9	Interlude	Fabrication de formes auto-couvrantes.

La construction de formules

De ce qui précède, il résulte que :

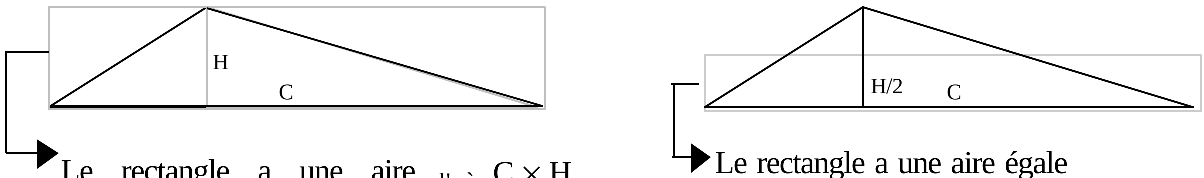
- certaines formules ne sont que lecture-écriture de ce qui est. C'est le cas du carré (côté × côté) et du rectangle (Longueur × largeur)



3 rangées de 3 carrés 3 rangées de 5 carrés

- d'autres proviennent de transformations réalisables :

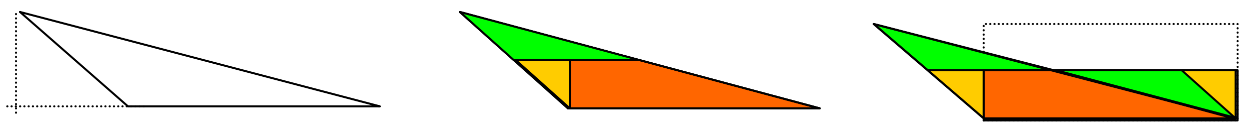
C'est le cas du triangle et ce sous deux formes :



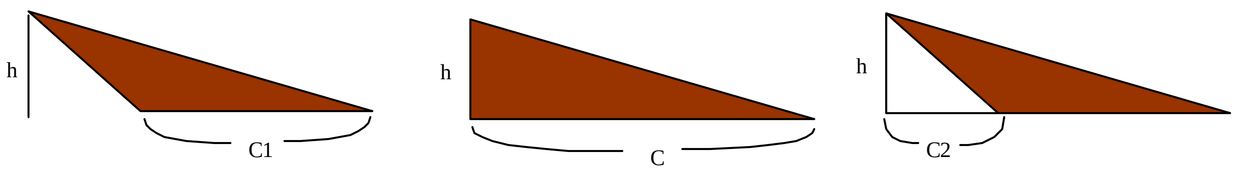
Le rectangle a une aire double de celle du triangle. d'où $\frac{C \times H}{2}$

Le rectangle a une aire égale à celle du triangle. d'o $C \times \frac{H}{2}$

Remarque 1 : La transformation est encore réalisable lorsque la hauteur est extérieure au triangle :



Dans ce cas, il est possible d'opérer par différence

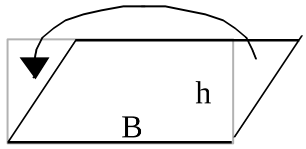


Aire du triangle = ½ C × h – ½ C2 × h = ½ (C-C2) × h = ½ C1 × h

Remarque 2 :

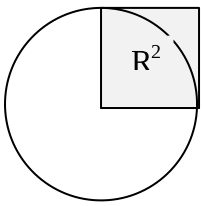
Algébriquement il est équivalent d'appliquer C/2 × H . Mais ceci ne correspond à aucune décomposition-recomposition.

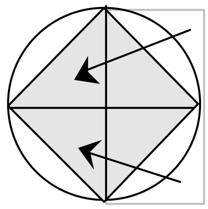
- C'est aussi le cas du parallélogramme :

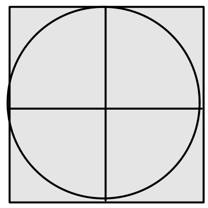


- Enfin dans le cas du cercle aucune transformation réelle ne peut le transformer en rectangle ou carré (célèbre problème dit de la quadrature du cercle). La formule bien connue (S = $\pi \times R^2$ s'appuie sur des techniques de calculs fondées sur les notions de limites et de calcul infinitésimal). Il est par contre possible (et souhaitable) de montrer que la surface du cercle est comprise entre

$2 R^2$ et **$4 R^2$**







et même de développer des procédures d'approche (Cf. Fiche 10e)

Supports et activités proposées dans ce livret

N°	Objectif	**Nature de l'activité**
10a 10b 10c 10d 10e	Formules Aire du triangle, du parallélogramme, du disque.	Du triangle au parallélogramme (1) Du triangle au parallélogramme (2) Du parallélogramme au rectangle Du rectangle au carré Activités autour de la quadrature du cercle

Découpages et recomposition de surfaces

François BOULE (CNEFEI)

Les connaissances scolaires sur les aires et les volume ont souvent été réduites à l'apprentissage et l'usage de formules. C'est à la fois donner une prépondérance au calcul et à la mesure (dont l'apprentissage oppose des obstacles considérables), et priver l'intuition de moyens commodes et de preuves accessibles. Pour éviter cette centration prématurée, voire exclusive sur les aspects calculatoires, les programmes inscrivent comme compétence exigible, dès la classe de sixième, la détermination d'aires à partir d'un pavage simple, et encouragent dans les commentaires la détermination d'aire à l'aide "soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrement". Ceci ménage d'ailleurs une continuité salutaire avec les programmes du cycle III des écoles.

On trouve le souci de construire une théorie géométrique déductive, sans disposer dès l'abord des nombres, chez Euclide et chez Hilbert notamment. Les pages qui suivent proposent quelques exemples, inspirés par ces auteurs, et adaptés à une présentation au collège.

Chez Euclide, la notion d'aire n'est pas définie précisément; c'est l'*égalité d'aire* qui est définie.
Un premier théorème énonce : "des parallélogrammes, construits sur la même base, et entre les mêmes parallèles sont égaux".
Il s'agit donc de montrer que les parallélogrammes ABCD et ABC'D' ont même aire (fig. 1).

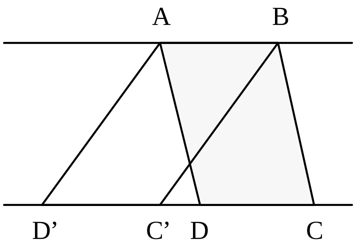


fig. 1

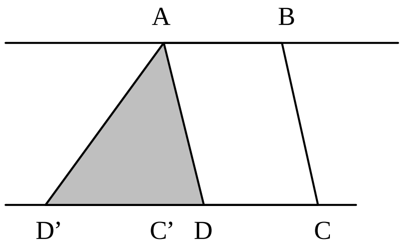


fig. 2

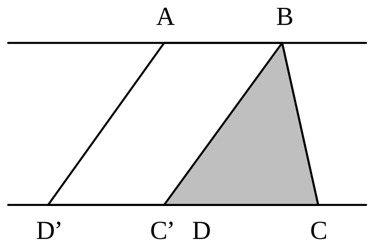


fig. 3

La démonstration d'Euclide repose sur la décomposition en triangles "égaux" (isométriques) et en faisant usage des propriétés fondatrices concernant les grandeurs (invariance d'une égalité par ajouts ou retrait de grandeurs égales, ou par doublement). Une preuve "mécanique" peut être tenue pour équivalente. On considère le contour ABCD', et le triangle mobile grisé.
Lorsque le triangle occupe la position ADD', il découvre le parallélogramme ABCD ; lorsqu'il occupe la position BCC', il découvre le parallélogramme ABC'D'. Ces deux aires sont donc égales.

Une fois admise la formule permettant d'obtenir l'aire du rectangle, on peut en faire dériver des formules d'aire du parallélogramme, du triangle rectangle, du triangle quelconque.

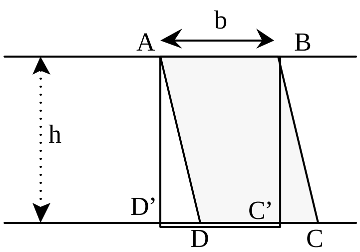


fig. 4

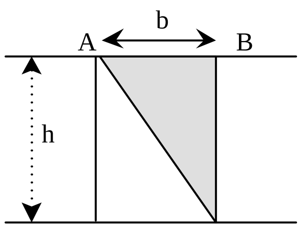


fig. 5

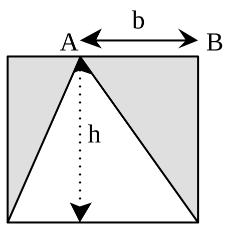


fig. 6

En effet le parallélogramme ABCD équivaut au rectangle ABC'D' (fig.4), le triangle rectangle est obtenu en partageant le rectangle (fig. 5) et le triangle quelconque en juxtaposant deux triangles rectangles (fig. 6). C'est le parti choisi par Clairaut dans ses *Eléments de Géométrie* (1741).

Mais on peut aussi, sans passer par la construction de formules, établir de nombreux résultats intéressants. En voici quelques-uns.

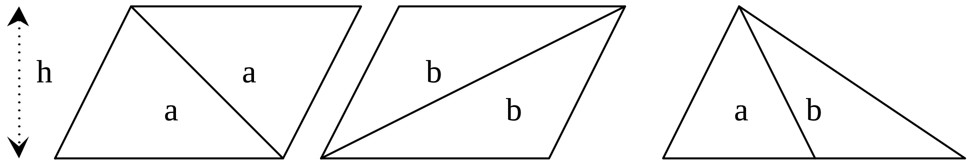


fig. 7 *fig. 8*

La décomposition d'un même parallélogramme par ses deux diagonales fait apparaître soit deux triangles (a) soit deux triangles (b) [fig. 7]. Ces deux triangles ont même aire. « *Deux triangles ayant un côté de même longueur, et même hauteur relative à ce côté ont même aire* ».
Il en résulte que la médiane découpe un triangle en deux triangles d'aires égales : (a) = (b) [fig. 8].

Deux résultats bien connus en découlent.

fig. 9 *fig. 10*

Soient B' et C' les milieux de deux côtés d'un triangle (fig. 9). Les aires AB'C et ABC' sont égales à la moitié du triangle ABC. Par différence, les aires BB'C et CC'B sont égales. Ces deux triangles ayant même base, il en résulte que (B'C') est parallèle à (BC). On en déduit aussi que [B'C'] est moitié de [BC].

B' et C' sont milieux de deux côtés d'un triangle (fig. 10). (BC') et (CB') se rencontrent en G. (AG), (BC'), (CB') découpent six petits triangles. D'après le résultat représenté en figure 8, les aires AGC' et CGC' sont égales (a), et aussi AGB' et BGB' (b). Mais les aires CAB' et BAC' sont égales à la moitié de l'aire du triangle ABC.
Donc a + a + b = b + b + a. Il en résulte que a = b, et donc que BG = 2 GC'. « *La médiane BC' rencontre la médiane CB' au tiers de la longueur (en partant de la base)* . Ceci permet de déduire que les trois médianes ont un point commun (le "centre de gravité").

Parmi les centaines de démonstrations du théorème de Pythagore, voici une démonstration chinoise, qui n'utilise que des découpages et des translations.

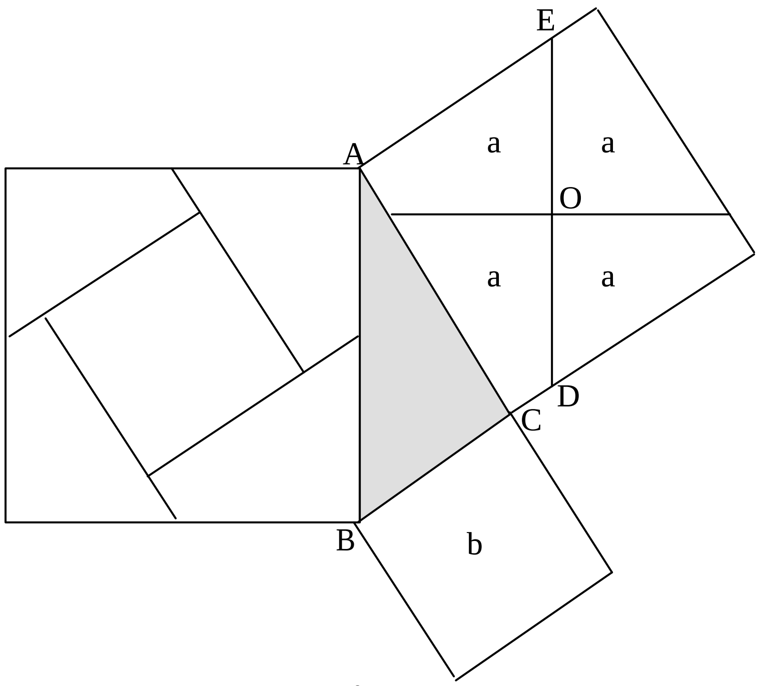


fig. 11

Le carré de centre O est découpé selon une parallèle et une perpendiculaire à l'hypoténuse du triangle grisé. Les quatre morceaux (a) et le carré (b) recouvrent le carré construit su l'hypoténuse. La preuve résulte de l'analyse du parallélogramme ABDE.
Hilbert (*Les fondements de la géométrie*) a formalisé l'édifice euclidien en définissant deux notions concernant les figures polygonales : l'**équidécomposabilité** et l'**équicomplémentarité**.
Deux figures sont "équidécomposables" s'il est possible de décomposer chacune d'elle en éléments deux à deux équivalents quant à l'aire. Deux figures P et P' sont "équicomplémentaires" s'il existe des figures Q et Q' équidécomposables telles que la juxtaposition de P et Q d'une part de P'et Q' d'autre part soient équidécomposables.

Changement d'échelle

Que devient l'aire lorsque l'on double les dimensions ? La réponse est évidente pour un carré ou un rectangle. Elle est également simple lorsqu'il s'agit d'un triangle quelconque (fig. 12) , en conséquence du résultat que représente la figure 9. Mais pour un polygone quelconque (fig. 13) ? Le polygone agrandi ne se laisse pas toujours recouvrir par quatre petits polygones de même forme. La décomposition en triangles donne une preuve.

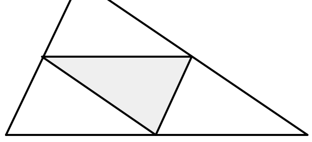


fig. 12

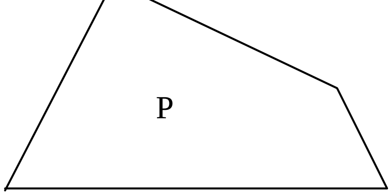


fig. 13

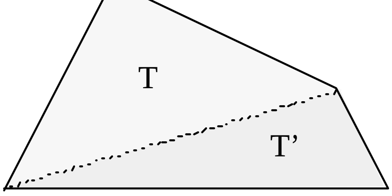


fig. 14

P est décomposable en triangles. Le polygone dont on a doublé les dimensions aussi (fig. 15).
Lesquels sont décomposables en petits triangles T et T'.

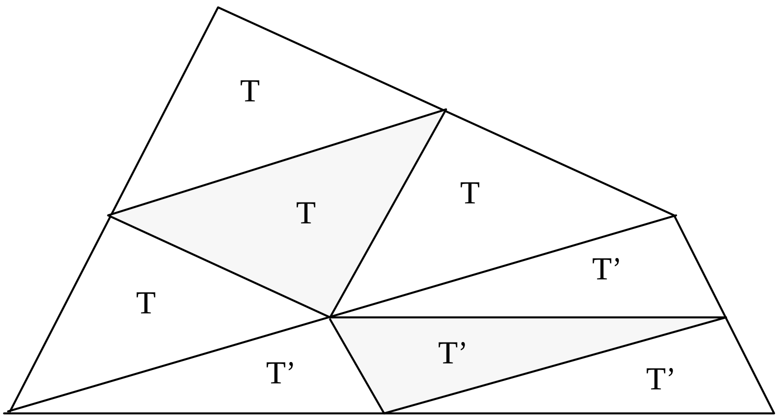


fig. 15

C'est ainsi que l'on peut donner à l'intuition le résultat important : quand toutes les dimensions sont multipliées par K, le périmètre est multiplié par K et l'aire par K^2.

Mais cette méthode est malheureusement difficile à étendre aux volumes…

Bibliographie :

Géométrie, Michel Carral, Ellipses, 1995,
Aires, Groupe Géométrie et arithmétique, IREM de Bordeaux, 2000,
Questions sur la géométrie, FrançoisBoule, Nathan, 2001.

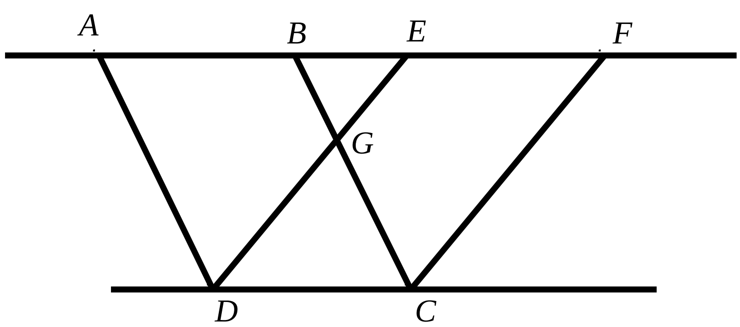
Découpages et recompositions pour les aires et volumes

André PRESSIAT (INRP)

Nombreux sont les acteurs de l'enseignement des mathématiques qui souhaitent ne pas réduire l'apprentissage des notions d'aire et de volume à la manipulation des formules permettant de les calculer. Pour éviter cette centration prématurée sur les aspects calculatoires, les programmes[1] inscrivent comme compétence exigible la détermination d'aires à partir d'un pavage simple, et encouragent dans les commentaires la détermination d'aires à l'aide “soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements”. La pratique des reports, décompositions, découpages et recollements se voit souvent légitimée à ce niveau de l'enseignement par l'âge des élèves et leur faible maturité mathématique. L'objet de ce texte est de mettre en évidence la légitimité de ces pratiques en les reliant aux travaux sur les aires et les volumes de mathématiciens aussi célèbres qu'Euclide dans ses *Éléments* et David Hilbert (1862 - 1943) dans *Les fondements de la géométrie*.

1 - Aires et volumes sans les mesures

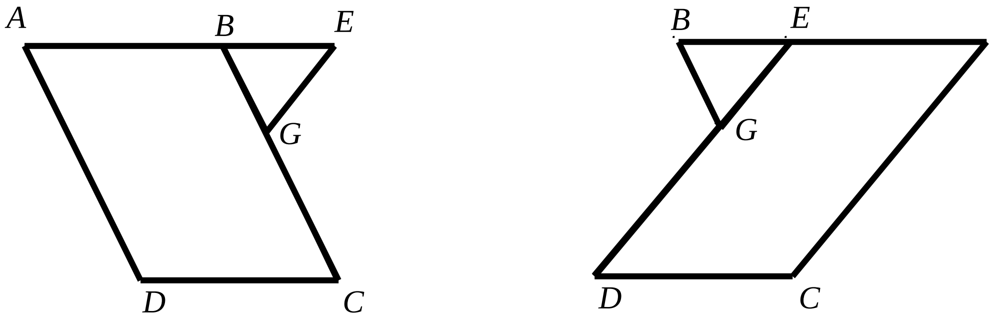
Ces deux mathématiciens ont en commun la volonté de construire une théorie géométrique sans disposer au départ de la notion de nombre. Pourtant, cette théorie prend en compte la question des aires et des volumes. Chez Euclide, la notion d'aire n'est pas définie précisément : il introduit une nouvelle notion d'égalité entre figures, qui correspond à ce que nous appellerions “figures d'aires égales”. Pour s'en faire une idée, nous allons examiner la démonstration du premier théorème, qui est le suivant : “Des parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux”.



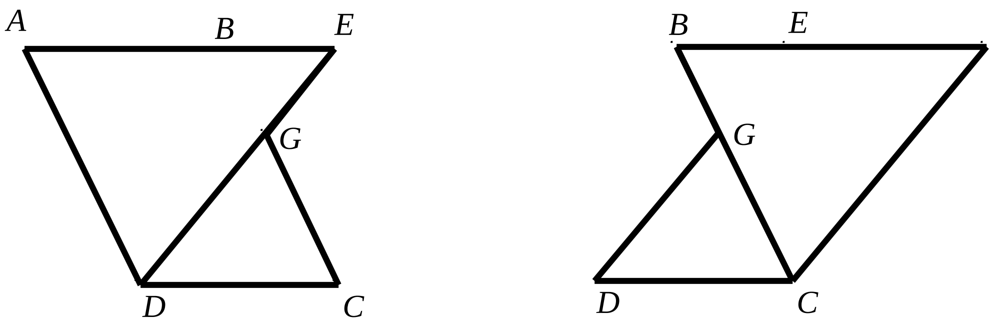
[1] Ce qui suit fait allusion aux programmes de la classe de Sixième.

ABCD et *CDEF* sont les deux parallélogrammes dont il s'agit de démontrer qu'ils sont “égaux” au sens donné à ce mot par Euclide.

Pour cela, il ajoute le triangle *BEG* à chacun des parallélogrammes. Il lui suffit alors de démontrer que les deux figures ainsi obtenues :



sont “égales”. Pour cela, il décompose chacune d'elles en deux triangles :



– les triangles *ADE* et *CDG* pour la première ;

– les triangles *BCF* et *CDG* pour la seconde.

Il lui suffit alors de démontrer que les deux triangles *ADE* et *BCG* sont “égaux”, c'est-à-dire “isométriques”, ce qu'il fait en utilisant l'un des cas d'“égalité” des triangles.

La démonstration donnée par Euclide, ainsi que celles qui suivent, reposent sur plusieurs propriétés admises dès le départ de son livre (Notions communes) concernant les grandeurs :

- Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
- Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
- Les grandeurs qui sont doubles (ou moitiés) d'une même grandeur sont égales.
- Le tout est plus grand que la partie.

De plus, il utilise deux autres propriétés admises :

- Des figures “égales” (au premier sens, c'est-à-dire “isométriques”) sont égales (au nouveau sens, c'est-à-dire ont des aires égales).
- Si deux carrés sont “égaux” au sens nouveau, leurs côtés sont “égaux” (au sens premier d'“isométriques”).

On voit le rôle tenu par les idées de décompositions, et de recollements dans cette démonstration.

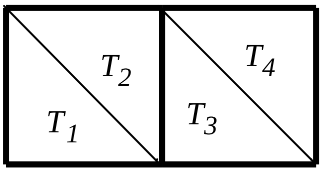
Hilbert, dans son travail de remise de l'édifice euclidien sur des bases logiques solides, va-t-il rejeter ces idées ? Au contraire, il va les formaliser en définissant deux notions concernant les figures polygonales[2], : l'équidécomposabilité, et l'équicomplémentarité.

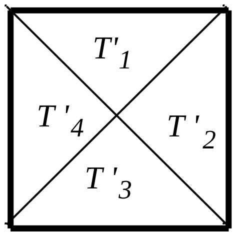
Deux figures P et P' sont équidécomposables[3] s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

$$P\ ?\ T_1\ ?\ T_2\ ?\ \ldots\ ?\ T_n$$
$$P'\ ?\ T'_1\ ?\ T'_2\ ?\ \ldots\ ?\ T'_n$$

telles que, pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient “égaux” (Hilbert emploie le mot “congruents” au lieu de “égaux”).

Ainsi, par exemple, la réunion de deux carrés “égaux” est équidécomposable avec un carré construit sur une de leurs diagonales.





Pour pouvoir correctement formaliser la notion de figures “égales” (au sens de "ayant des aires égales”) créée par Euclide, et notamment pour pouvoir légitimer les additions et soustractions de figures “égales” que ce dernier utilise dans ses démonstrations, Hilbert définit la notion d'équicomplémentarité :

Deux figures P et P' sont équicomplémentaires[4] s'il existe des figures Q et Q' telles que :

– P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– P' et Q' n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– Q et Q' sont équidécomposables ;
– $P\ ?\ Q$ et $P'\ ?\ Q'$ sont équidécomposables.

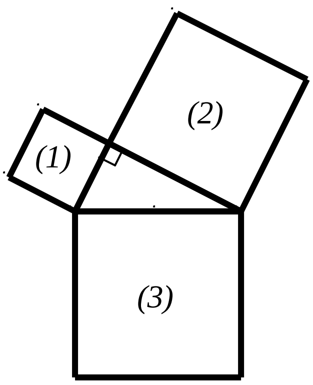
[2] Ce sont les figures qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une réunion d'un nombre fini de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre (ou encore de triangles n'ayant en commun qu'un sommet ou un segment, mais n'ayant pas de points intérieurs en commun : certains auteurs qualifient de tels triangles de “quasi-disjoints”).

[3] En allemand, le mot correspondant est “zerlegungsgleich” qui signifie “égale décomposition, ou égal découpage).

[4] Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot “inhaltsgleich”, qui signifie littéralement "contenu égal, ou superficie égale" ; dans les quatre éditions suivantes, il emploie “ergängzungsgleich” qui signifie “égal par complément”.

Le lecteur pourra reprendre la démonstration du théorème relatif aux parallélogrammes *ABCD* et *CDEF* évoquée ci-dessus. En posant $P = ABCD$, $P' = CDEF$, $Q = Q' = BEG$, $P\ ?\ Q$ et $P'\ ?\ Q'$ sont équidécomposables, car réunion des triangles *ADE* et *CDG* d'une part et *BCF* et *CDG* d'autre part, triangles qui sont deux à deux congruents.

Deux figures équidécomposables sont évidemment équicomplémentaires. Mais deux figures équicomplémentaires (ayant le même contenu) sont-elles équidécomposables ?



Par exemple, sur la figure bien connue ci-contre, la figure formée par la réunion des carrés (1) et (2), dont le théorème de Pythagore affirme qu'elle a le même contenu que le carré (3), est-elle équidécomposable avec ce carré ?

Nous allons voir que la réponse est affirmative, sous certaines conditions.

2 - Aires et volumes avec des nombres

À l'école et au collège, on aborde la géométrie en s'autorisant l'emploi des nombres, qui sont très tôt utilisés pour mesurer les longueurs. Hilbert a construit une théorie permettant de construire des nombres en partant des segments de droite parmi lesquels est choisi arbitrairement un segment unité, et de définir pour ces nombres les quatre opérations et la relation d'ordre usuels[5]. En ce qui concerne les aires, il a démontré qu'il est alors possible d'associer à chaque figure polygonale *P* un nombre *a(P)*, de telle manière que :

- pour tout triangle *T*, $a(T) > 0$;
- si *T* et *T'* sont deux triangles “égaux”, alors $a(T) = a(T')$;
- si deux figures *P* et *Q* n'empiètent pas l'une sur l'autre, alors $a(P\ ?\ Q)\ ?\ a(P)\ ?\ a(Q)$.

Le nombre *a(P)* est appelé “aire de *P*”. L'aire d'un triangle est définie à l'aide de la formule usuelle “1/2 *bh*”, et l'aire d'un carré construit sur un segment unité est égale à 1. Alors Hilbert

[5] Usuellement, les nombres utilisés sont les nombres réels, mais la théorie d'Hilbert permet de ne pas se limiter à ce cas.

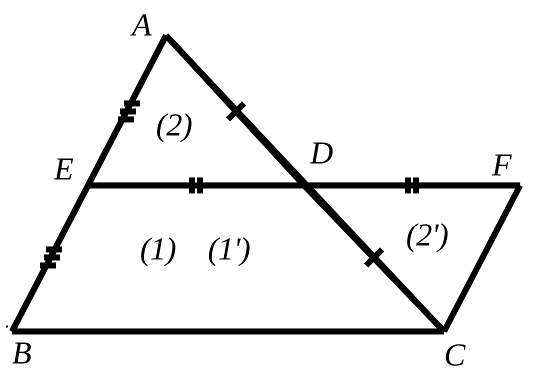
démontre que, dans un plan satisfaisant l'axiome des parallèles, deux figures P et Q sont équicomplémentaires si et seulement si $a(P) = a(Q)$.

Pourquoi évoquer ici l'axiome des parallèles ? La raison vient du fait que la question des aires a fait l'objet d'un intense travail au moment de la découverte des géométries non-euclidiennes, et que l'un des théorèmes fondamentaux sur les aires porte le nom de Bolyai (1802-1860 ; il est le découvreur de l'une d'entre elles : la géométrie hyperbolique). Le théorème de Bolyai-Gerwien établit un lien entre "avoir même aire" et "être équidécomposable". Plus précisément :

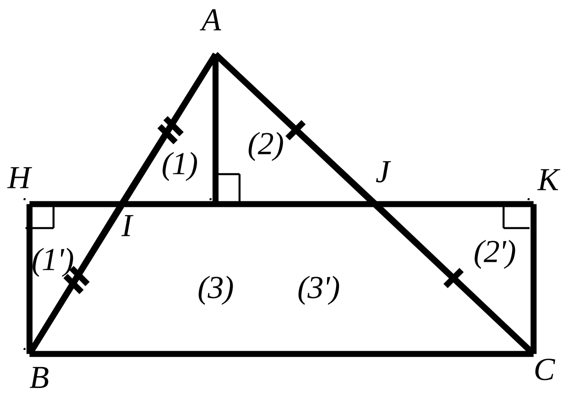
Dans un plan vérifiant l'axiome des parallèles et l'axiome d'Archimède[6], deux figures P et Q sont équidécomposables si et seulement si $a(P) = a(Q)$.

Ainsi, en rajoutant l'axiome d'Archimède à la théorie, il y a équivalence entre "avoir des aires de même mesure" et "être équidécomposable". Cet axiome jouissant à l'école et au collège d'un fort degré d'évidence, il est légitime sur le plan mathématique d'organiser avec les élèves des travaux autour de la notion d'équidécomposabilité. Pour des raisons pratiques, on peut avantageusement la remplacer par la notion *d'équivalence par dissection*, qui lui est équivalente. La seule différence réside dans le fait que les figures appariées intervenant dans une dissection ne sont pas nécessairement des triangles, mais peuvent être n'importe quelles figures polygonales isométriques, alors que pour l'équidécomposabilité les figures appariées sont nécessairement des triangles.

Les figures et propriétés suivantes nous ramènent aux questions d'aires traitées au collège, et fournissent des justifications qui sont abordables à ce niveau.

 	Tout triangle est équivalent par dissection à un parallélogramme. En effet, les deux triangles *ADE* et *CDF* sont isométriques, images l'un de l'autre par la symétrie de centre *D*. Donc le triangle *ABC* et le parallélogramme *BCFE* sont équivalents par dissection.

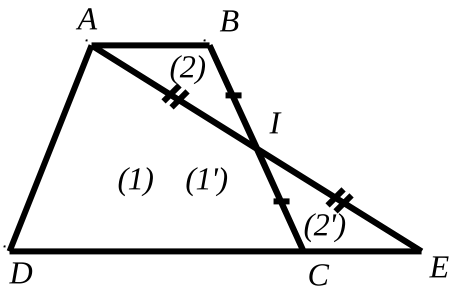
[6] Cet axiome s'énonce ainsi : quels que soient les segments *AB* et *CD*, il existe un entier naturel n tel que le segment formé par n copies de *AB* mises bout à bout soit plus grand que le segment *CD*.



Tout triangle est équivalent par dissection à un rectangle.

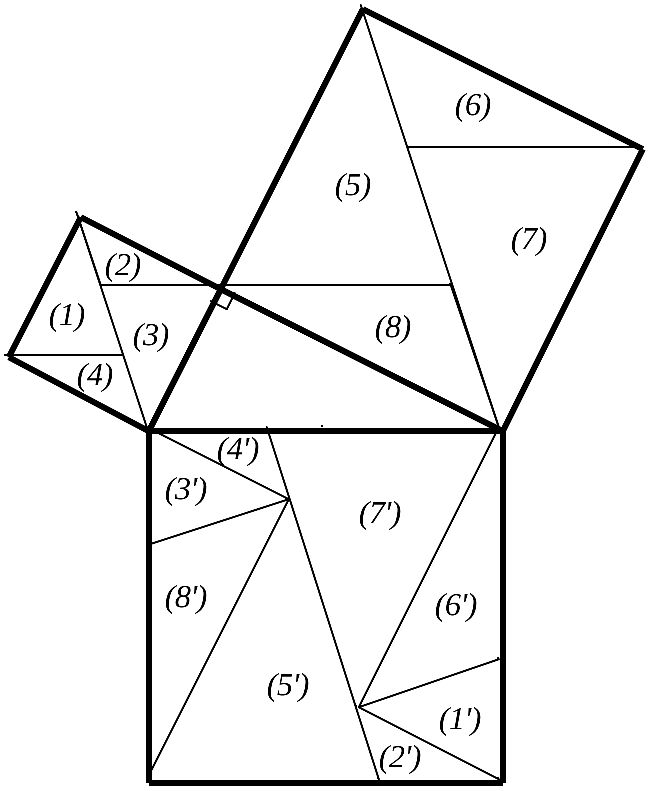
Là encore, on utilise des symétries centrales.

Le triangle *ABC* et le rectangle *BCKH* sont équivalents par dissection.



Tout trapèze est équivalent par dissection à un triangle.

Là encore, l'isométrie qui permet d'apparier *(2)* et *(2')* est une symétrie centrale.



Considérons la configuration du théorème de Pythagore. Voici une dissection des deux figures ayant même aire, que le lecteur est invité à reproduire et à justifier.

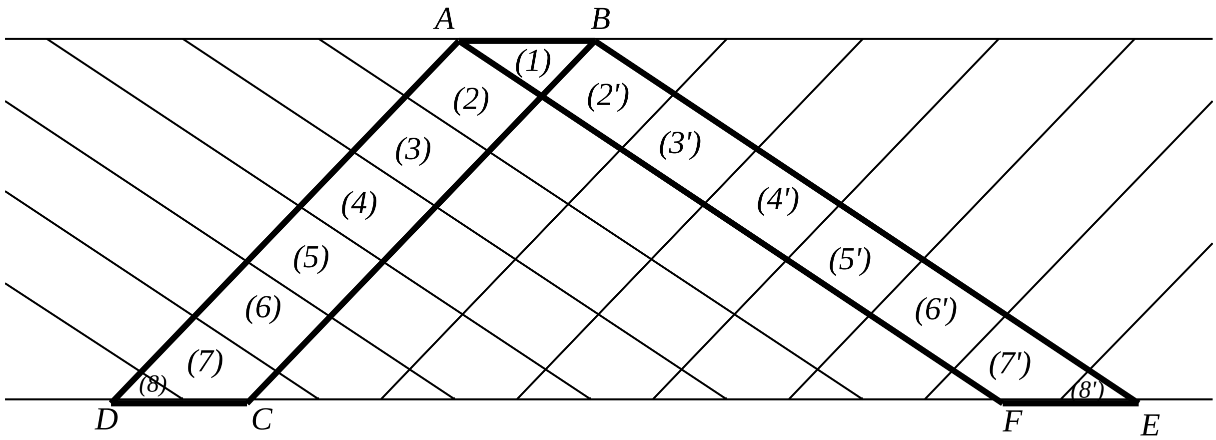
On pourra remarquer que les isométries permettant d'apparier les triangles ne sont pas toutes des symétries centrales.

Dans les trois premiers exemples qui précèdent, les seules isométries qui ont été utilisées sont des symétries centrales. On dit que deux figures *P* et *Q* sont S-équidécomposables (ou équivalentes par S-dissection) lorsqu'elles sont équivalentes par dissection et que les isométries permettant les appariements sont des translations ou des symétries centrales.

En 1951, les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur ont démontré que deux figures P et Q ont même aire ($a(P) = a(Q)$) si et seulement si P et Q sont S-équidécomposables.

Ce résultat étonnant garantit que deux parallélogrammes ayant une base en commun et situés entre les mêmes parallèles sont S-équidécomposables.

La figure ci-dessous suggère le moyen d'obtenir une S-dissection des deux parallélogrammes *ABCD* et *ABEF*, ainsi que l'importance du rôle de l'axiome d'Archimède (qui nous garantit qu'une telle dissection existe quel que soit le cas de figure dans lequel [AF] et [BC] se coupent.).



3 - Et pour les volumes ?

Les techniques développées par Euclide pour les aires lui permettent d'établir les résultats relatifs aux volumes des parallélépipèdes et des prismes. Mais il adopte une méthode complètement différente et beaucoup plus compliquée (la méthode d'exhaustion) pour établir les résultats concernant les pyramides. Des mathématiciens comme Gauss et Gerling se sont demandés s'il était possible d'établir ces résultats sans recourir à la méthode d'exhaustion. C'est précisément cette question qui constitue l'un des 23 problèmes que Hilbert proposa à la communauté des mathématiciens réunie au Congrès de Paris en 1900. Le troisième problème de Hilbert consistait à démontrer que la méthode d'exhaustion est vraiment nécessaire en exhibant deux solides ayant le même volume mais qui ne sont pas équidécomposables. La solution à ce problème fut trouvée la même année par le mathématicien Max Dehn, qui a montré qu'un tétraèdre ne peut pas être dissecté en un cube. Ainsi l'équidécomposabilité caractérise les figures planes d'aires égales, mais pas les solides de l'espace de volumes égaux.

Classes - relais
Aire et périmètre
Bibliographie

Il ne s'agit pas de fournir ici au lecteur une bibliographie complète sur la question, mais seulement de sélectionner quelques éléments où trouver matière, d'une part à illustrer ce thème par des situations pédagogiques, et d'autre part à alimenter sa curiosité personnelle.

Dans les manuels scolaires ou les ouvrages parascolaires de niveau collège

MATH (dir. Eric Serra), Mathématiques 6e, Bordas, 1996
- p. 175 Comparer des aires, comparer des périmètres
- p. 180 Calcul d'aires par décomposition

CINQ sur CINQ (dir. R.Delord et G.Vinrich) Math 5e, Hachette Education, 1997
- pp. 165, 170, 176, 178

Une année de sixième en mathématiques, IREM de Limoges, CRDP du Limousin (1997, 1998)
- pp. 35 - 42 (tome 1)
- pp. 15 - 21 et 77-81 (tome 2)

Les efficaces en math 6e - 5e Nathan, 1998
- pp. 59 à 66, p.174 à 191

PYTHAGORE 5e, Hatier 1991
- p. 184 - 86 Formule de Pick.
- p. 200 Aires et volumes

DECIMALE Math 5e, Belin, 1997
- p. 212 - 219 Découpage, pliage ; drôle de puzzle

MATH 5e Bordas, 1997
- p. 237 Aire du disque, encadrement par des carrés et des triangles
- p. 246 Exercice sur Périmètre/aire

CINQ sur CINQ (dir. R.Delord et G.Vinrich) Math 4e, Hachette Education, 1998
- p. 93 Le terrain de rugby

MATH par la pratique 3e technologique, Nathan, 1994
- p. 34 - 35 Périmètres, aires

Pour approfondir

BOULE, F. (2001) *Questions sur la géométrie et son enseignement*, Nathan.
CHAMONTIN F. (en collaboration avec CAZIER B. et PICOT M.), 2001, *Des aires sans mesure à la mesure des aires*, Repères IREM n°44, pp. 33-62.
CLAPPONI, P. (1993) *Activités géométriques au collège*, Petit X, hors série, IREM de Grenoble.
COMBIER, G. et PHILIPPON, M. (1994) *Aire et périmètre. Le Tout de l'aire en collège*, IREM de Lyon.
DELEDICQ, A. et RABA, R. (1997) *Le monde des pavages*, ACL-Editions du kangourou, Paris.
Groupe Géométrie et arithmétique (2000) *Aires*, IREM d'Aquitaine, 33400 Talence.
FRIEDELMEYER J. P. (1998) *Les aires : outil heuristique - outil démonstratif*, Repères IREM n°31, pp. 39-62.

Egalité d'aires sans passer par la mesure, utilisation des aires dans les démonstrations de géométrie, références historiques, activités pour les élèves de collège et de lycée.

HARTSHORNE R. (2000) *Geometry : Euclid and beyond,* Springer.

Ouvrage en anglais, faisant le point sur la question des aires : en repartant du point d'Euclide, l'auteur en met en évidence les prouesses et les défauts, et réussit à montrer comment Hilbert est parvenu à éliminer ces derniers. Le texte est facilement lisible au départ (pp. 40-45), et se complique un peu vers la fin (pp. 196-225). Contient toutes les démonstrations des résultats évoqués dans l'article de A. Pressiat.

STOLL A. (1998) *Les lunules d'Hippocrate de Chio,* Repères IREM n°31, pp. 29-38.

Pistes d'activités pour la classe à partir de problèmes historiques. Utilisation de propriétés géométriques pour comparer des aires.

WHEELER (1970) *Mathématiques dans l'enseignement élémentaire*, OCDL, Paris.

Une vingtaine de pages sur le Géoplan.

Quelques résultats de recherche en didactique

PERRIN-GLORIAN M.- J. (1989) *L'aire et la mesure,* Petit *x* n° 24, p. 5 - 36.

Transposition didactique de la notion d'aire. Etude des programmes, des manuels, et des articles du bulletin de l'APMEP. Choix didactiques pour une suite cohérente de situations d'enseignement.

MOREIRA-BALTAR P. (1993) *Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire - périmètre pour les rectangles,* Petit *x* n° 34, p. 5-29.

Les élèves développent de façon indépendante une conception géométrique et une conception numérique de l'aire sans les mettre en relation. Il y aurait deux niveaux dans la dissociation aire - périmètre : au premier niveau, l'élève accepte que des rectangles de même périmètre puissent avoir des aires différentes (et réciproquement) ; au deuxième niveau, l'élève accepte que l'aire et le périmètre peuvent varier dans des sens différents.

MOREIRA-BALTAR P. (1996) *A propos de l'apprentissage du concept d'aire*, Petit *x* n° 43, p. 43-68.

Article issu de la thèse de l'auteur. Etude des programmes de l'école et du collège, des évaluations nationales en début de 6e et de l'APMEP en fin de 6e et de 5e. Les aires sont un point faible de chacune de ces évaluations, et l'évaluation de l'APMEP montre que ce thème discrimine les futurs redoublants (réussite divisée par 2). Revue des travaux antérieurs sur l'apprentissage de la notion d'aire, analysant les difficultés des élèves, et soulignant l'importance du travail dans le cadre géométrique, s'appuyant notamment sur le découpage - recollement et le pavage, qui sont des procédures disponibles en 6e.

MOREIRA-BALTAR P. (1998) *Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège*, Petit *x* n° 49, pp. 45 - 78.

Présentation d'un outil de classification des situations d'enseignement concernant le concept d'aire à partir de la prise en compte de trois cadres (géométrique, grandeurs, numérique) et des moyens de les mettre en relation. L'auteur met à profit des allers et retours entre l'analyse du concept du point de vue mathématique, des exercices tirés de manuels, des évaluations nationales, et des variables didactiques des différents types de situations.

PRESSIAT A. (2001) *Grandeurs et mesures : l'évolution des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition*, Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques. (à paraître).

L'étude concerne la transposition des travaux mathématiques récents (XXe siècle) dans une perspective de formations des professeurs, sur les deux questions suivantes : aires et volumes d'une part, grandeurs dans le sens général (grandeurs - produits, grandeurs-quotients, …) d'autre part.

Aire et Périmètre : Tableau général des activités

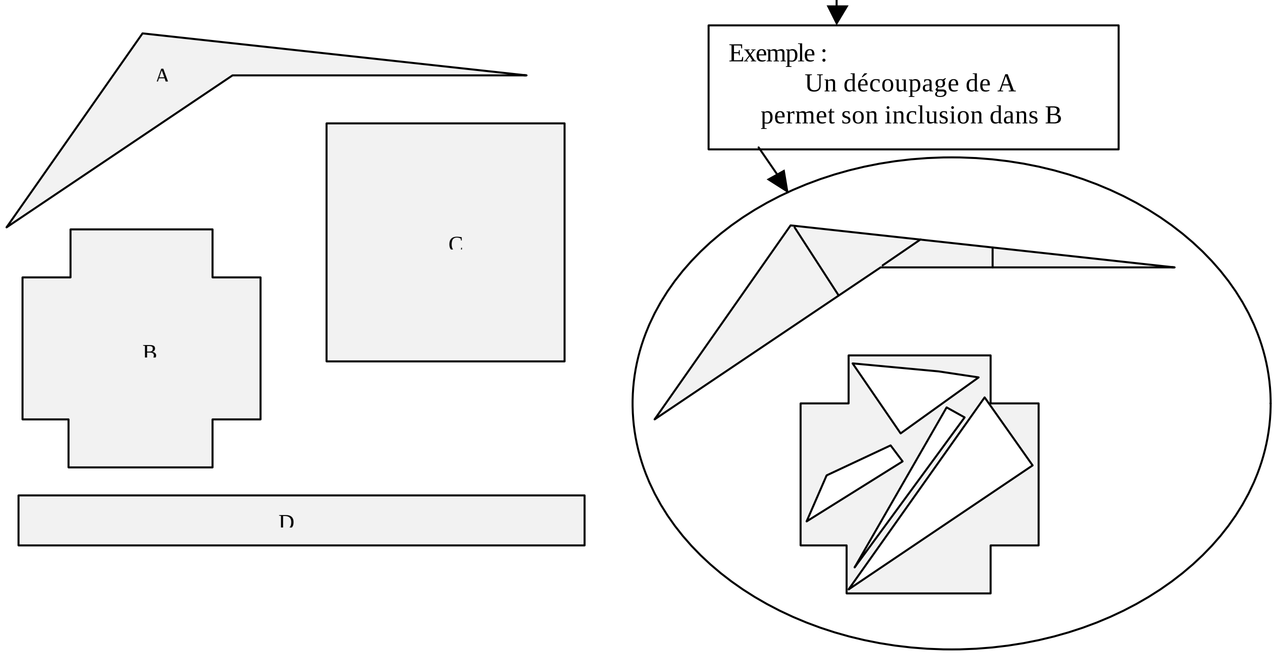
N°	Objectif	Nature de l'activité
1	Dissociation des concepts d'aire et de périmètre	Comparaison de figures selon leurs aires et leurs périmètres. Prise de conscience que le classement dépend du critère retenu
2		Travail à périmètre constant : comparaison selon leur aire de figures ayant même périmètre
3		Travail à aire constante : comparaison selon leur périmètre de figures ayant même aire (Tan Gram)
	Evaluation 1	
4	Approche des notions de mesure d'aires et de périmètres	Expression des caractéristiques des pièces constituant un Tan gram à partir de celles du triangle de base.
5		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures (cas simples).
6		Utilisation des valeurs obtenues dans l'analyse et la comparaison de différentes figures (cas complexes).
7 7a	Vers la construction de formules Travail sur des « planches à clous »	Inventaires des carrés et des rectangles (planche à 9 clous puis à 16 clous)
7b		Inventaires des triangles (planche à 9 clous) et des polygones réguliers (Maillage Triangle-Equilatéral)
7c		Expression de différentes figures (triangles, carrés, parallélogrammes) à partir de 2 triangles de base
7d		Mesure d'aires sur une planche à 16 clous
7e		Formule de Pick
8 8a	Faire prendre conscience que si on multiplie les longueurs par k les aires sont multipliées par k^2	Carrés de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8b		Triangles équilatéraux de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8c		Sphinx de dimension double, triple, moitié et tiers. Variation corrélative des aires
8d		Découpage d'un sphinx en 16 sphinx
8e		Assemblage d'un sphinx avec 25 sphinx
9	Interlude : Pavages	Fabrication de formes auto-couvrantes.
10 10a	Formules Aire du triangle, du parallélogramme , du disque.	Du triangle au parallélogramme (1)
10b		Du triangle au parallélogramme (2)
10c		Du parallélogramme au rectangle
10d		Du rectangle au carré
10e		Activités autour de la quadrature du cercle

Objectif : Dissociation des concepts d'aire et de périmètre sans recours aux mesures

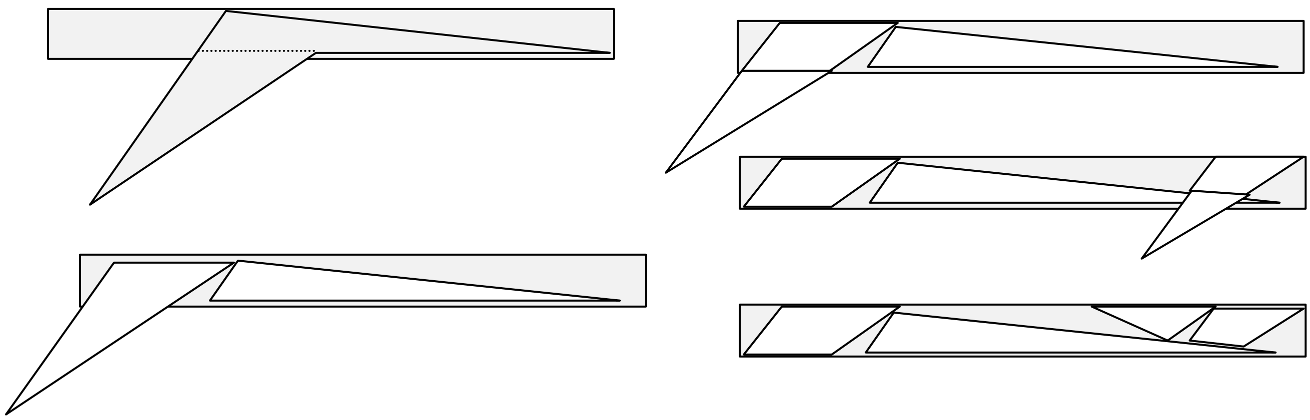
Démarche : Comparaison deux à deux (sans mesurer : Cf. p4 du document de présentation de ce dossier) de quatre surfaces.

Pour les périmètres les comparaisons se feront en utilisant de la ficelle, ou un compas si les compétences des élèves le permettent.

Pour les aires, les comparaisons se feront par découpages (si nécessaires) et inclusions



Exemple de découpage progressif permettant la comparaison des aires de A et D



Comparaison deux à deux des surfaces A, B, C et D

D'après leur périmètre :
- **périmètre de A > périmètre de B**
- **périmètre de A < périmètre de D**
- **périmètre de B < périmètre de D**
- **périmètre de A > périmètre de C**
- **périmètre de B = périmètre de C**
- **périmètre de C < périmètre de D**

D'après leur aire :
- **aire de A < aire de B**
- **aire de A < aire de C**
- **aire de A < aire de D**
- **aire de B < aire de C**
- **aire de B > aire de D**
- **aire de C > aire de D**

Classement de la plus petite à la plus grande

- D'après leur périmètre : **périmètre de B = périmètre de C < périmètre de A < périmètre de D**

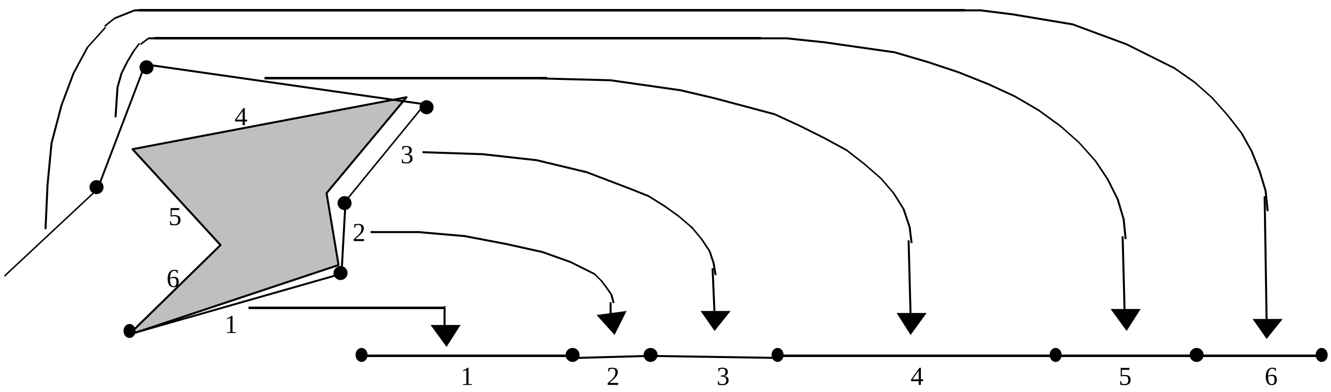
- D'après leur aire : **aire de A < aire de D < aire de B < aire de C**

Remarque : On trouvera dans les 2 pages suivantes des exemples de fiches "Outils à penser" (réalisées avec des élèves) que l'on pourra soit analyser soit réaliser avec les élèves.

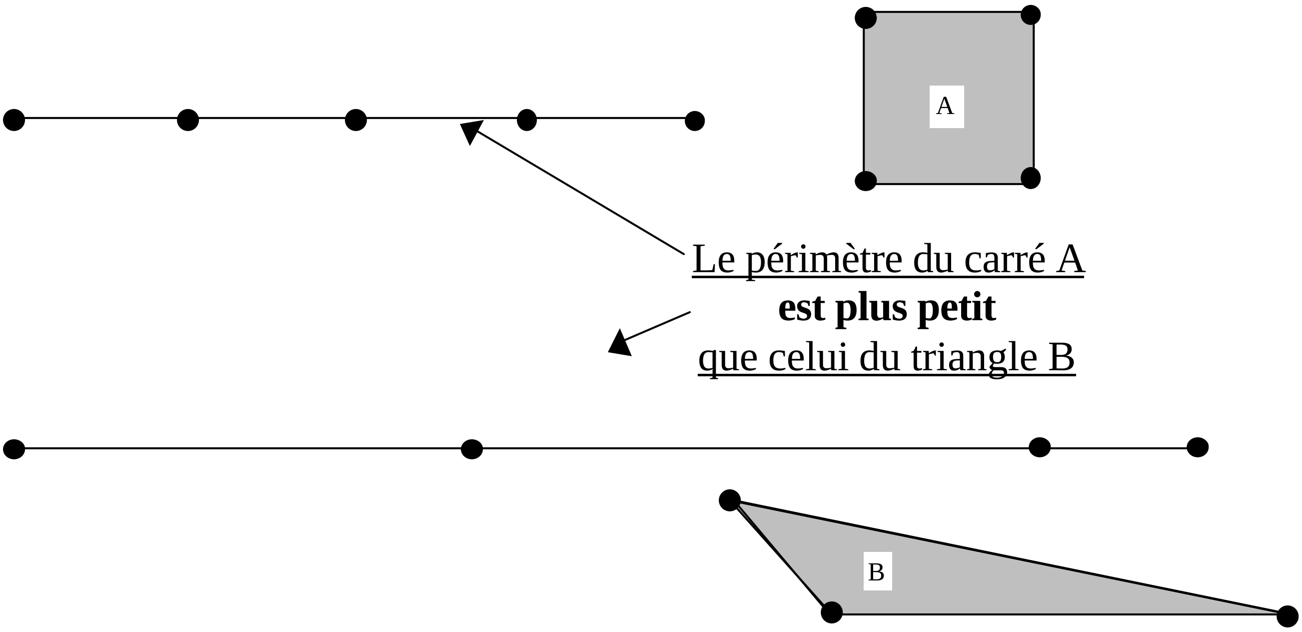
Comparaison des surfaces

<u>Critère</u> : Périmètre

Principe du déroulement



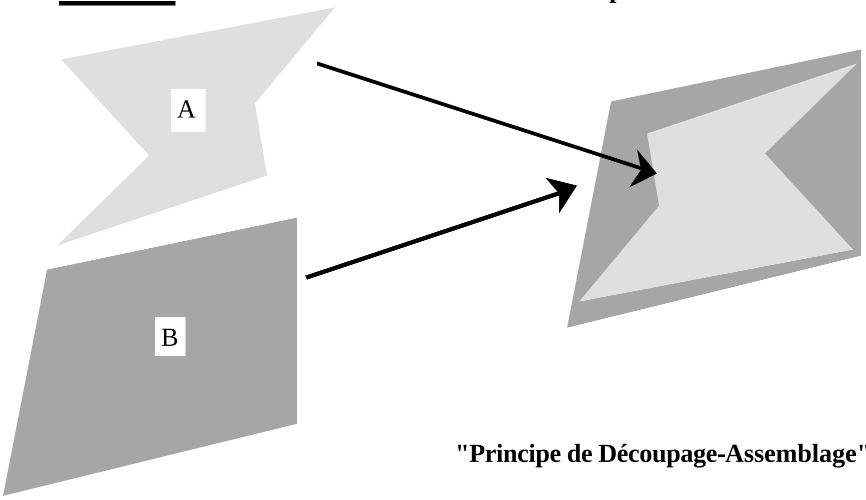
Exemples :



Comparaison des surfaces

<u>Critère</u> : Aire

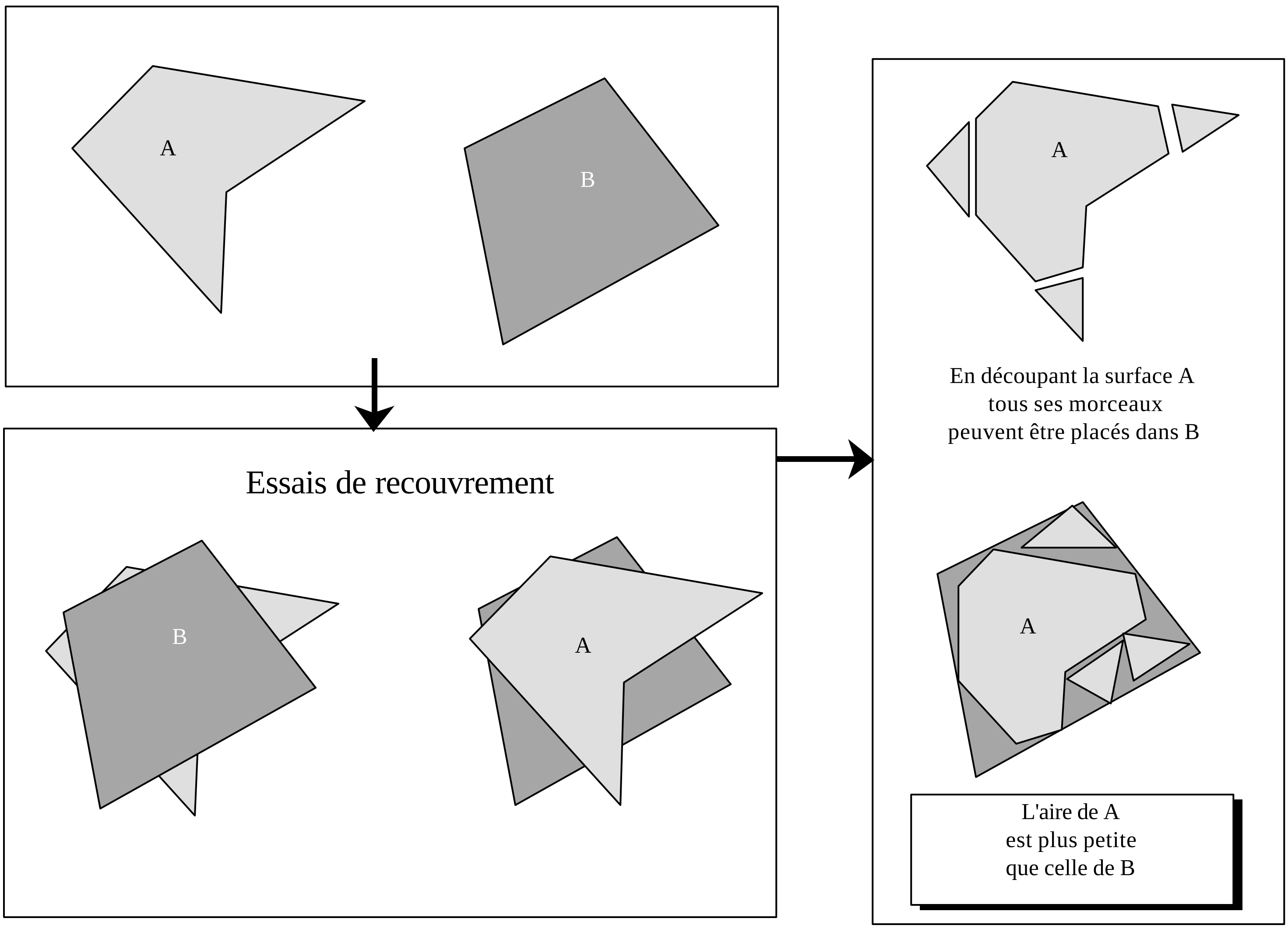
"Principe de recouvrement"

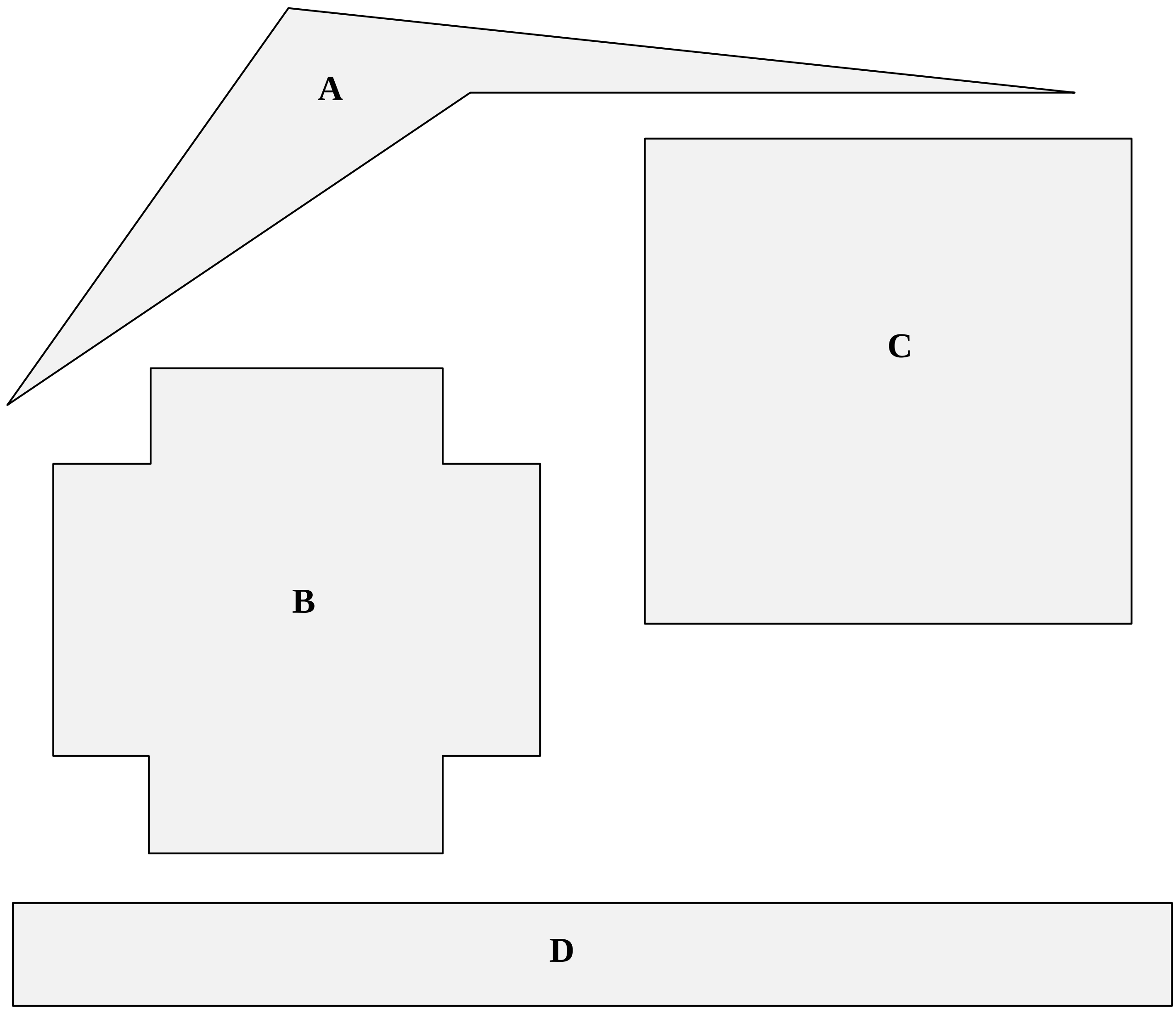


La surface A
est contenue entièrement
dans la surface B.

L'aire de A
est plus petite
que l'aire de B

"Principe de Découpage-Assemblage"





Comparaison deux à deux des surfaces A, B, C et D

- D'après leur périmètre :

périmètre de A	**périmètre de B**
périmètre de A	**périmètre de D**
périmètre de B	**périmètre de D**

périmètre de A	**périmètre de C**
périmètre de B	**périmètre de C**
périmètre de C	**périmètre de D**

- D'après leur aire :

aire de A	**aire de B**
aire de B	**aire de C**

aire de A	**aire de C**
aire de B	**aire de D**

aire de A	**aire de D**
aire de C	**aire de D**

Classement de la plus petite à la plus grande

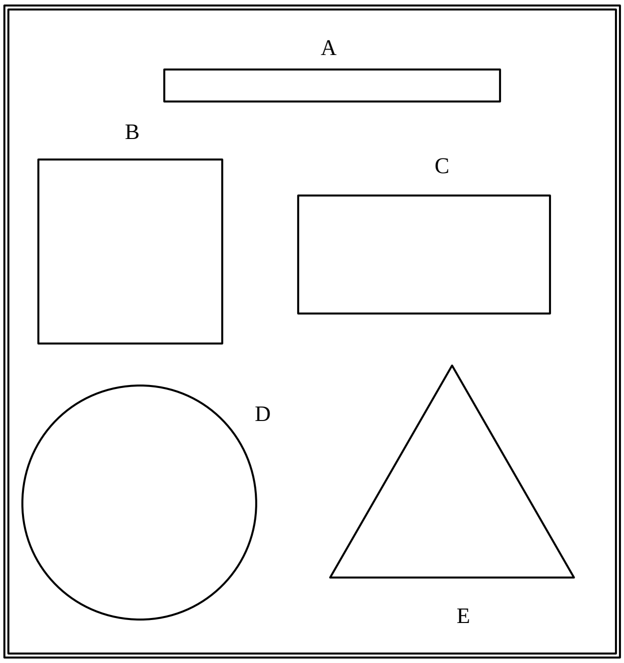
D'après leur périmètre : ____

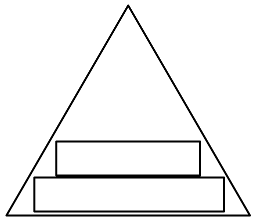
D'après leur aire : ____

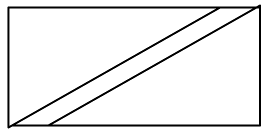
Travail à périmètre constant

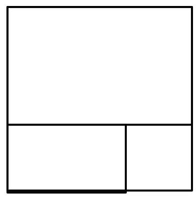
Objectif : Dissociation des concepts d'aire et de périmètre

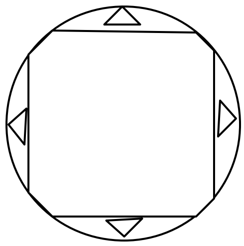
Démarche : Comparaison deux à deux (sans mesurer) de cinq surfaces ayant le même périmètre




Aire de A < Aire de E


Aire de E < Aire de C


Aire de C < Aire de B


Aire de B < Aire de D

1) Vérifier que ces cinq surfaces ont le même périmètre.

Cette vérification se fera en mesurant (Cf. p4 du document de présentation de ce dossier), avec de la ficelle. Pour le disque, on pourra après découpage le faire rouler sur un axe, voire le long d'une des autres surfaces. On insistera sur le fait que cette technique est approximative mais permet dans les situations proposées ici de faire les comparaisons demandées.

2) Comparer deux à deux les surfaces A , B, C, D et E selon leur aire

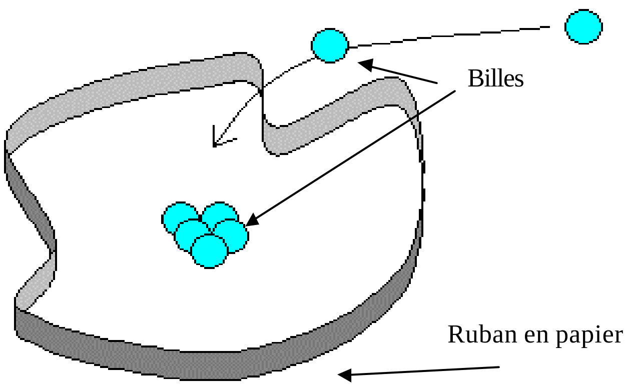
Aire de A < Aire de B		Aire de A < Aire de C		Aire de A < Aire de D	
Aire de A < Aire de E		Aire de B > Aire de C		Aire de B < Aire de D	
Aire de B > Aire de E		Aire de C < Aire de D		Aire de C > Aire de E	
Aire de D > Aire de E					

3) Classer, d'après leur aire, ces surfaces de la plus petite à la plus grande

Aire de **A** < Aire de **E** < Aire de **C** < Aire de **B** < Aire de **D**

Remarque

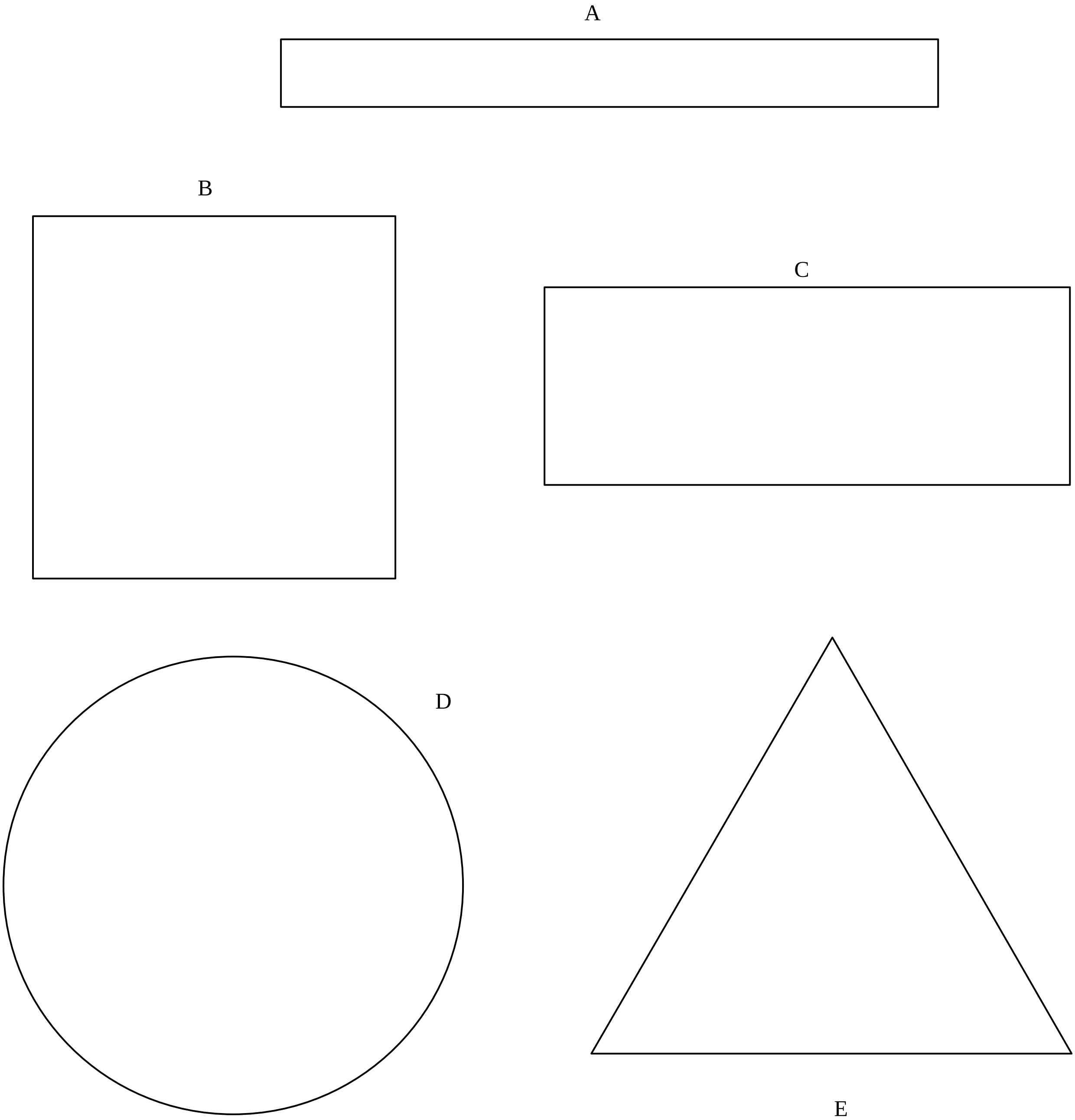
Empiriquement, il est possible de faire découvrir que le cercle est la forme qui a une aire maximale pour un périmètre donné. Pour ce faire on pourra utiliser un ruban de papier (1 cm de haut) dont l'intérieur sera rempli de billes. Le ruban prend progressivement la forme d'un cercle.



Cette technique permet de constater que le nombre maximum de billes que l'on peut mettre à l'intérieur correspond au cercle.

Elle permet également, en donnant au ruban la forme d'un carré (Fixer les sommets avec des épingles), de constater que l'aire du carré est beaucoup plus petite que celle du cercle.

Activité 2 . Fiche élève



1) Vérifier que ces cinq surfaces ont le même périmètre.

2) Comparer deux à deux les surfaces A , B, C, D et E selon leur aire

Aire de A	Aire de B
Aire de A	Aire de E
Aire de B	Aire de E
Aire de D	Aire de E

Aire de A	Aire de C
Aire de B	Aire de C
Aire de C	Aire de D

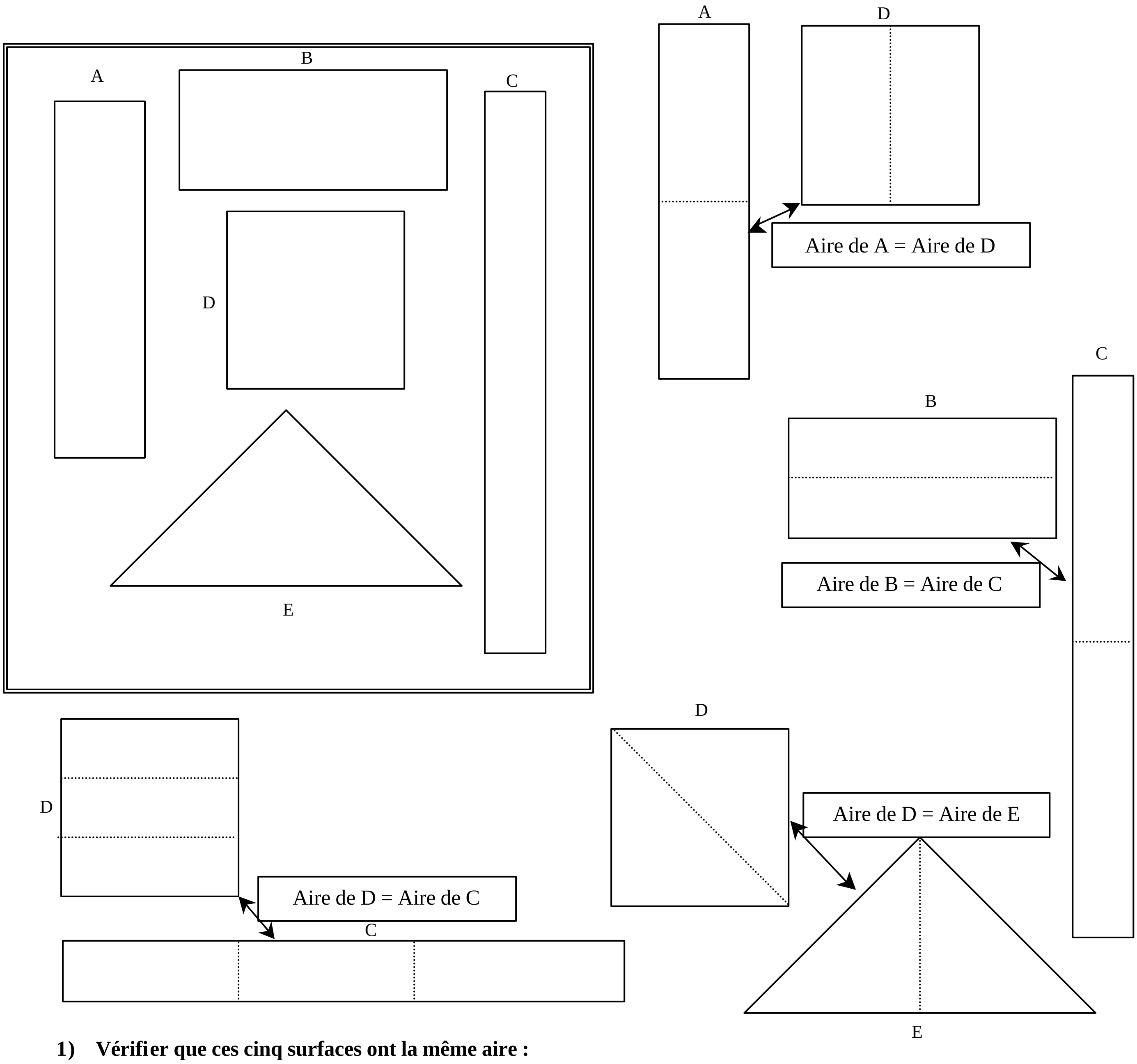
Aire de A	Aire de D
Aire de B	Aire de D
Aire de C	Aire de E

3) Classer, d'après leur aire, ces surfaces de la plus petite à la plus grande

Travail à Aire constante

Objectif : Dissociation des concepts d'aire et de périmètre.

Démarche : Comparaison deux à deux (sans mesurer) de cinq surfaces ayant la même aire.



1) Vérifier que ces cinq surfaces ont la même aire :

La vérification pourra se faire par un réel découpage ou par simple traçage. Exemples de découpages ci-dessus.

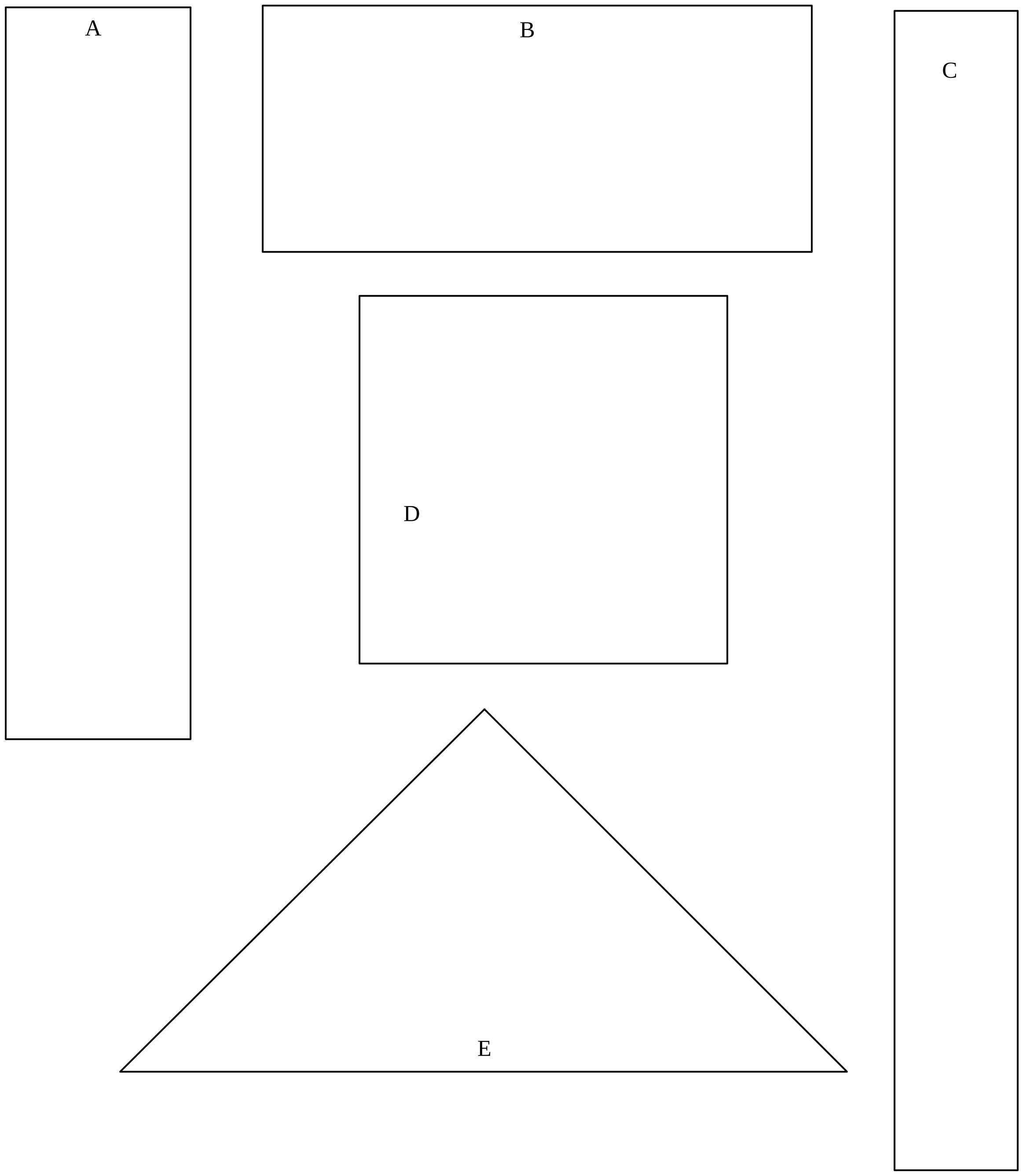
2) Comparer deux à deux les surfaces A , B, C, D et E selon leur périmètre :

Périmètre de A > Périmètre de B		Périmètre de A < Périmètre de C		Périmètre de A > Périmètre de D
Périmètre de A > Périmètre de E		Périmètre de B < Périmètre de C		Périmètre de B > Périmètre de D
Périmètre de B < Périmètre de E		Périmètre de C > Périmètre de D		Périmètre de C > Périmètre de E
Périmètre de D < Périmètre de E				

3) Classer, d'après leur périmètre, ces surfaces de la plus petite à la plus grande

Périmètre de **D** < Périmètre de **B** < Périmètre de **E** < Périmètre de **A** < Périmètre de **C**

Activité 3 . Fiche élève



1) Vérifier, par découpage et recomposition, que ces cinq surfaces ont la même aire.

2) Comparer deux à deux les surfaces A , B, C, D et E selon leur périmètre

Périmètre de A	Périmètre de B
Périmètre de A	Périmètre de E
Périmètre de B	Périmètre de E

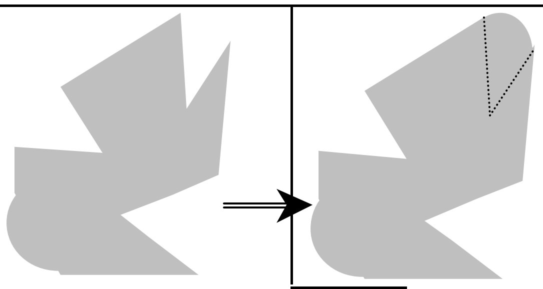
Périmètre de A	Périmètre de C
Périmètre de B	Périmètre de C
Périmètre de C	Périmètre de D
Périmètre de D	Périmètre de E

Périmètre de A	Périmètre de D
Périmètre de B	Périmètre de D
Périmètre de C	Périmètre de E

3) Classer, d'après leur périmètre, ces surfaces de la plus petite à la plus grande

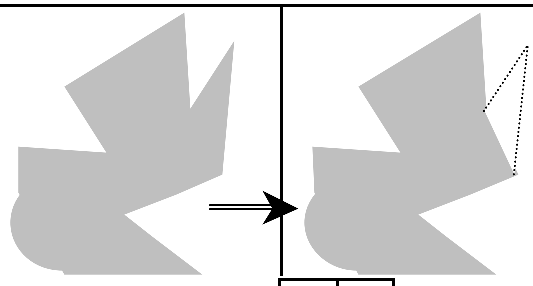
____

Dans chaque cas, préciser la variation du périmètre et de l'aire



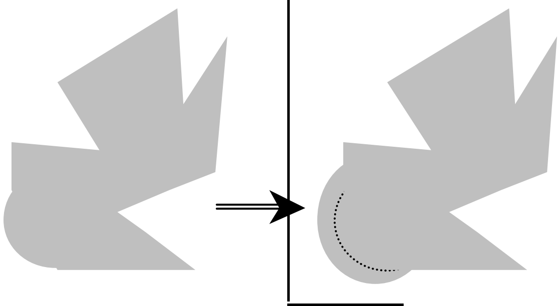
	✍	✍
Aire	x	
Périmètre		x

Surface de départ | Surface d'arrivée



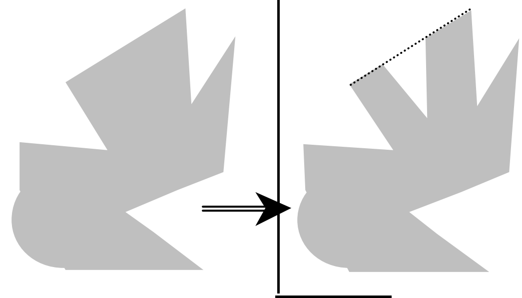
	✍	✍
Aire		x
Périmètre		x

Surface de départ | Surface d'arrivée



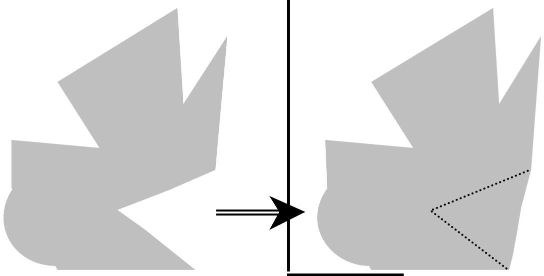
	✍	✍
Aire	x	
Périmètre	x	

Surface de départ | Surface d'arrivée



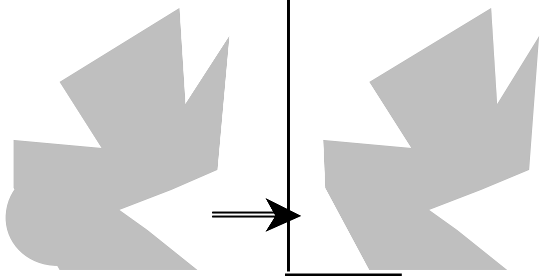
	✍	✍
Aire		x
Périmètre		x

Surface de départ | Surface d'arrivée



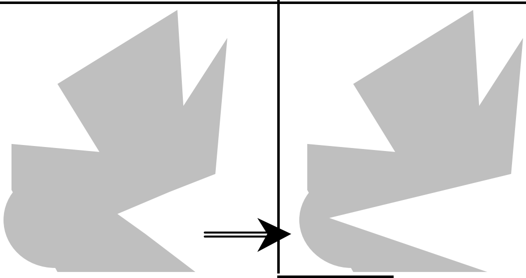
	✍	✍
Aire	x	
Périmètre		x

Surface de départ | Surface d'arrivée



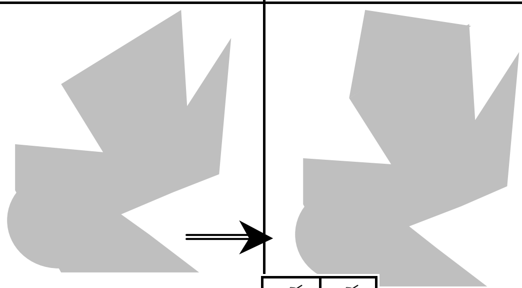
	✍	✍
Aire		x
Périmètre		x

Surface de départ | Surface d'arrivée



	✍	✍
Aire		x
Périmètre	x	

Surface de départ | Surface d'arrivée



	✍	✍
Aire	x	
Périmètre	x	

Surface de départ | Surface d'arrivée

Commentaires :

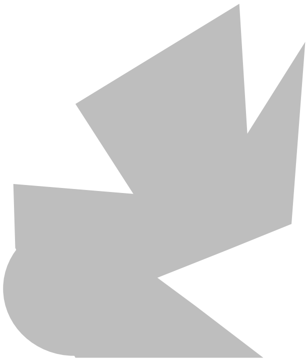
Bien faire comprendre l'organisation de la fiche, en particulier qu'il s'agit de préciser les variations quand on passe de la Surface de départ à la Surface d'arrivée.

Il peut être souhaitable de réaliser avec les élèves la première, voire la seconde étude en procédant ainsi :

1) Qu'est-ce qui a changé quand on passe de la Surface de départ à la nouvelle Surface
2) Comment varie l'aire ?
3) Comment varie le périmètre ?

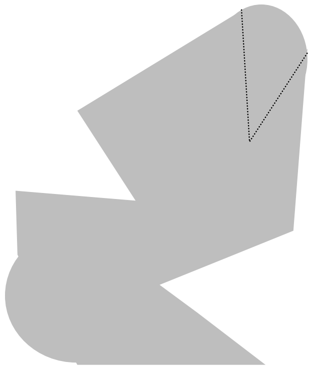
On remarquera que pour les 5 premiers cas, une indication permet de repérer plus facilement la transformation.

Dans chaque cas, préciser la variation du périmètre et de l'aire

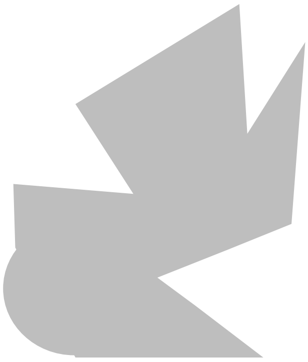


Surface de départ

	↗	↘
Aire		
Périmètre		

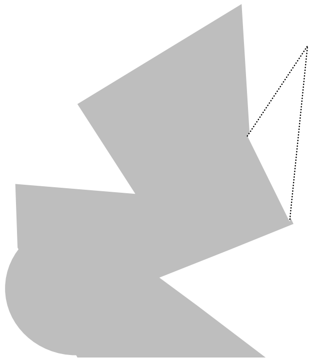


Surface d'arrivée



Surface de départ

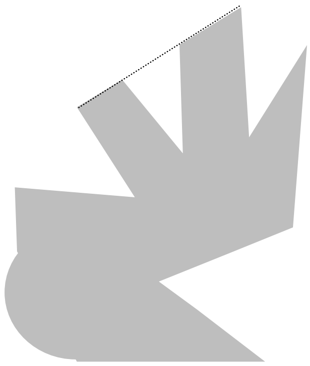
	↗	↘
Aire		
Périmètre		



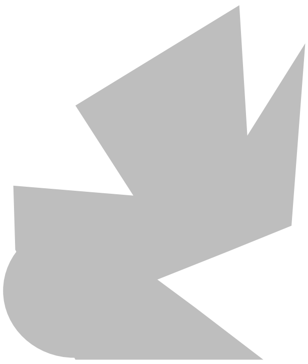
Surface d'arrivée

Surface de départ

	↗	↘
Aire		
Périmètre		

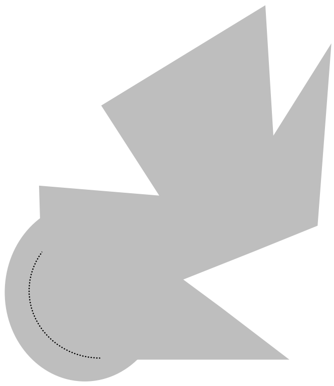


Surface d'arrivée



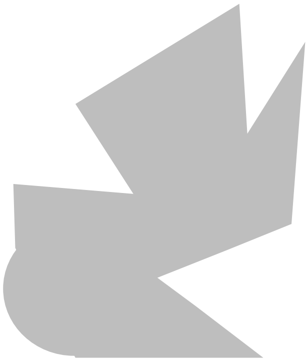
Surface de départ

	↗	↘
Aire		
Périmètre		



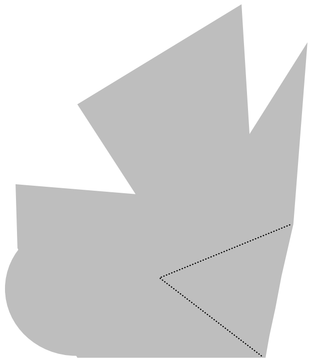
Surface d'arrivée

Dans chaque cas, préciser la variation du périmètre et de l'aire (suite)

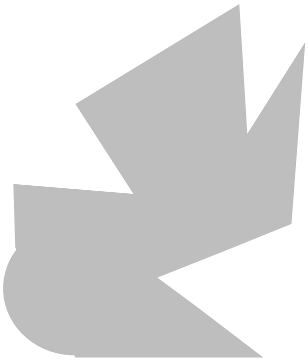


Surface de départ

	⇗	⇘
Aire		
Périmètre		

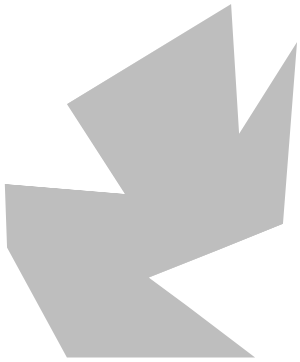


Surface d'arrivée

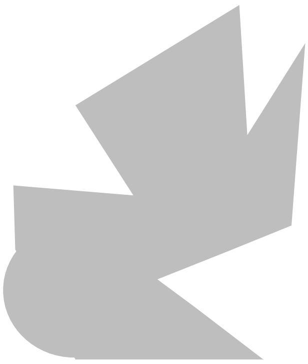


Surface de départ

	⇗	⇘
Aire		
Périmètre		

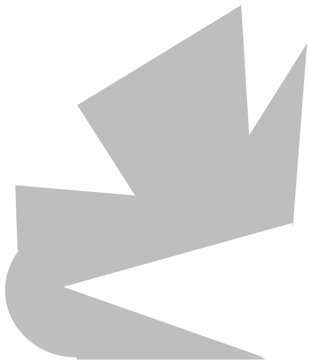


Surface d'arrivée

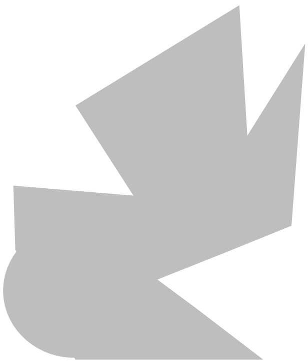


Surface de départ

	⇗	⇘
Aire		
Périmètre		



Surface d'arrivée



Surface de départ

	⇗	⇘
Aire		
Périmètre		

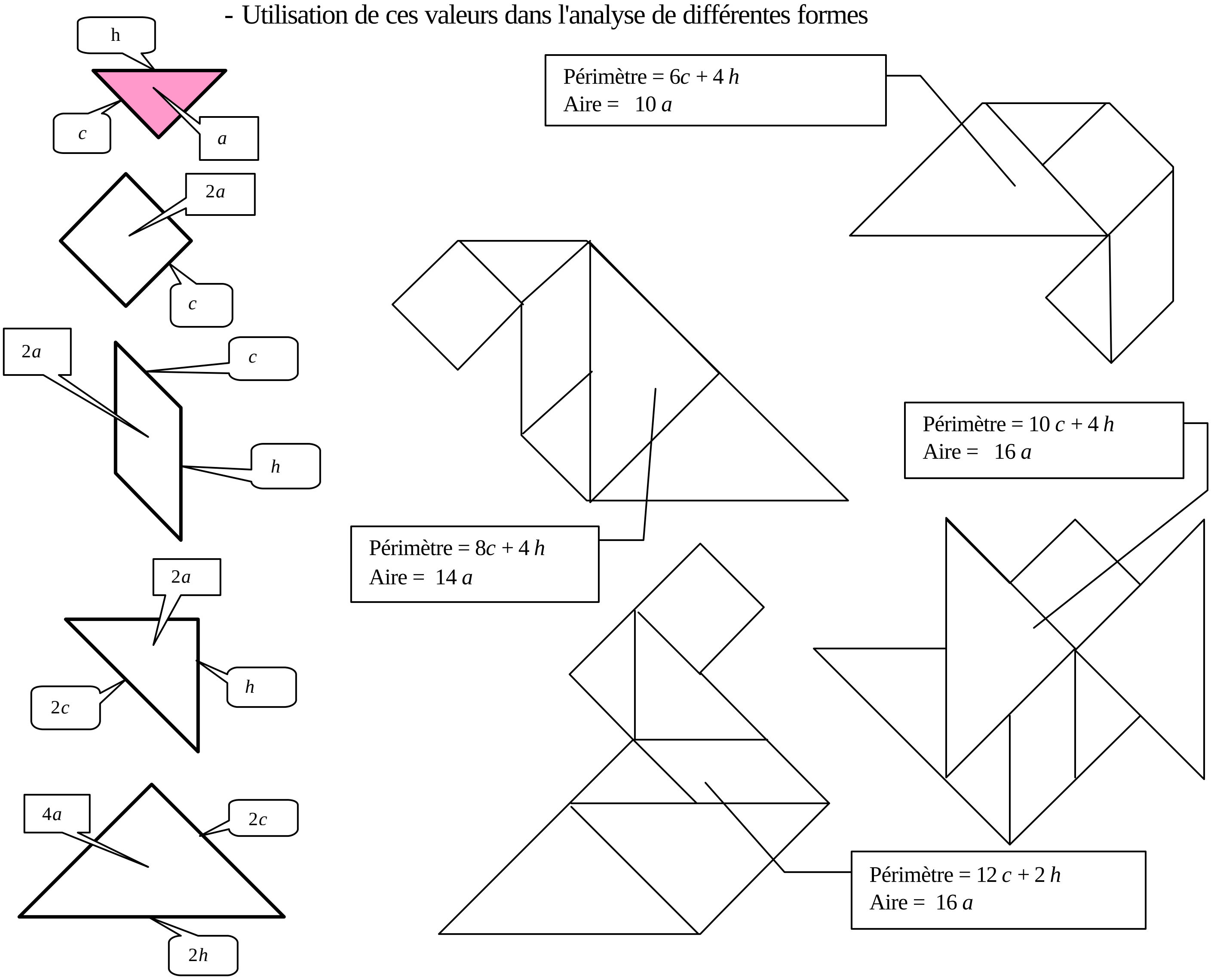
Surface d'arrivée

Travail avec le Tan Gram

Objectif : Approche des notions de mesure d'aires et de périmètres.

Démarche : - Expression des différentes valeurs des pièces constituant un Tan Gram à partir des valeurs du triangle de base en utilisant 2 segments (deux côtés du triangle) comme unités de longueur et ce triangle comme unité d'aire

- Utilisation de ces valeurs dans l'analyse de différentes formes



1) Expression des différentes "valeurs" des pièces du Tan Gram : les deux valeurs c et h sont nécessaires. L'une des difficultés réside dans le fait que c'est la valeur c (côté du triangle de base) qui permet l'expression de certaines hypoténuses et h l'expression de certains côtés de triangles isocèle-rectangle.

Toutes les aires s'expriment à partir de la seule aire a

2) Utilisation de ces valeurs dans l'analyse de différentes formes

La comparaison des aires ne pose pas de problème (unité unique)

La comparaison des périmètres malgré l'utilisation de deux grandeurs de référence ne pose pas de problème important pour les trois première figures (une valeur commune). Pour la comparaison des périmètres des deux dernières formes le cas est un peu plus délicat mais il suffit de remarquer que c étant inférieur à h on peut faire apparaître :

$12\,c + 2\,h$? $10\,c + 4\,h$

$\underline{10\,c + 2\,h} + \mathbf{2\,c}$ $\underline{10\,c + 2\,h} + \mathbf{2\,h}$

Valeur commune

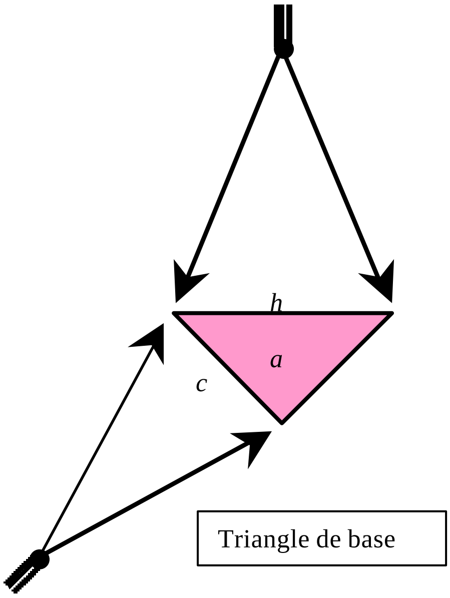
c < h **donc**

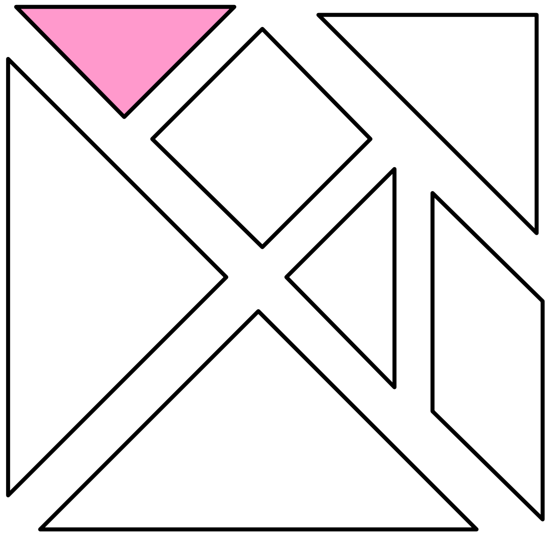
$\underline{10\,c + 2\,h} + \mathbf{2\,c}$ < $\underline{10\,c + 2\,h} + \mathbf{2\,h}$

Valeur commune

On trouvera dans la fiche Activité N° 6 des situations plus complexes permettant de souligner l'importance d'avoir une unité unique.

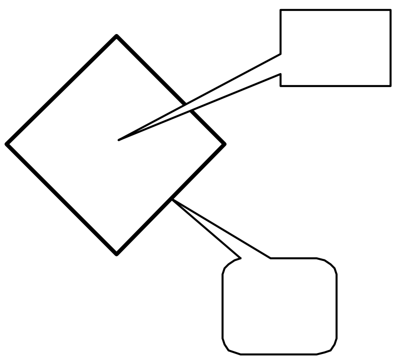
Tan Gram
Analyse des pièces

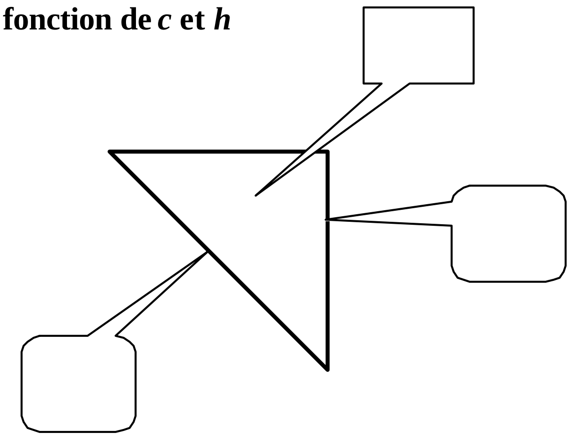


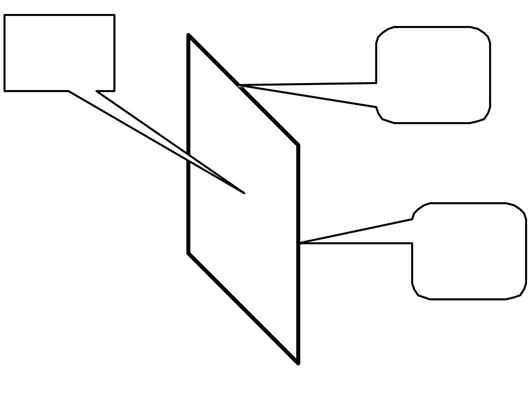


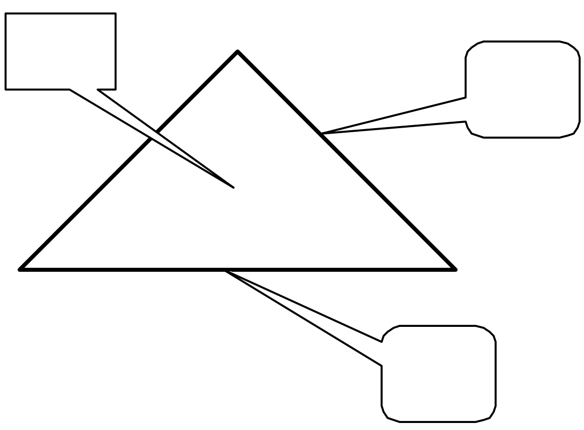
Pour chacune des autres pièces exprimer

- **La longueur de chacun de ses côtés en fonction de *c* et *h***
- **Son aire en fonction de *a***









Pour chacune des surfaces suivantes :

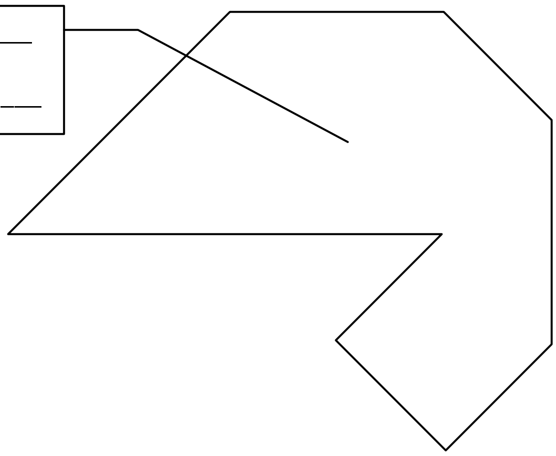
- faire apparaître les pièces du Tan gram utilisées,

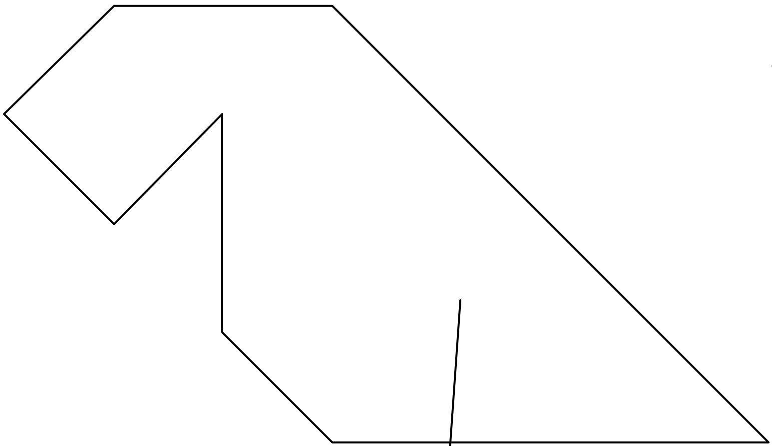
puis exprimer

- **son périmètre en fonction de *c* et *h***
- **son aire en fonction de *a***

Périmètre = ___________________

Aire = ________________________



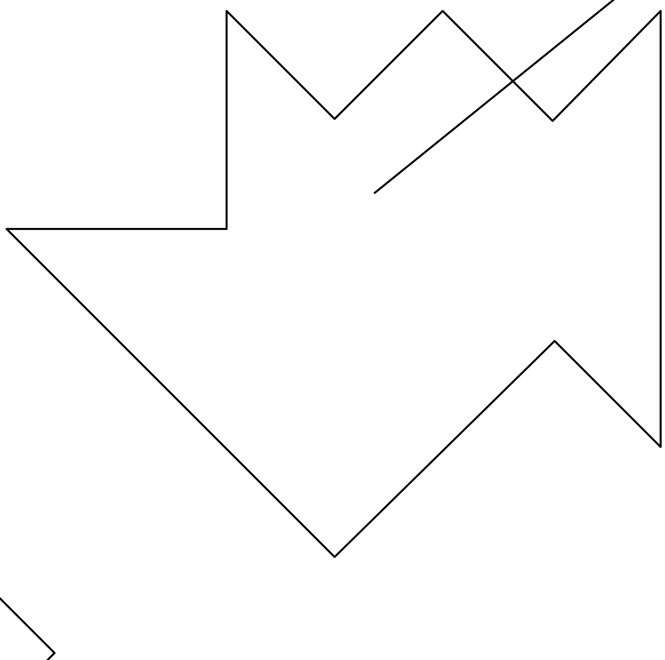


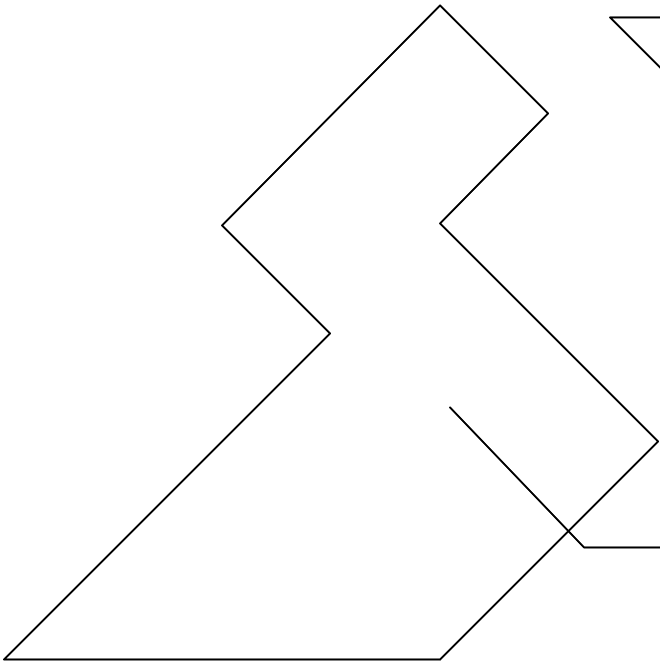
Périmètre = ___________________

Aire = ________________________

Périmètre = ___________________

Aire = ________________________



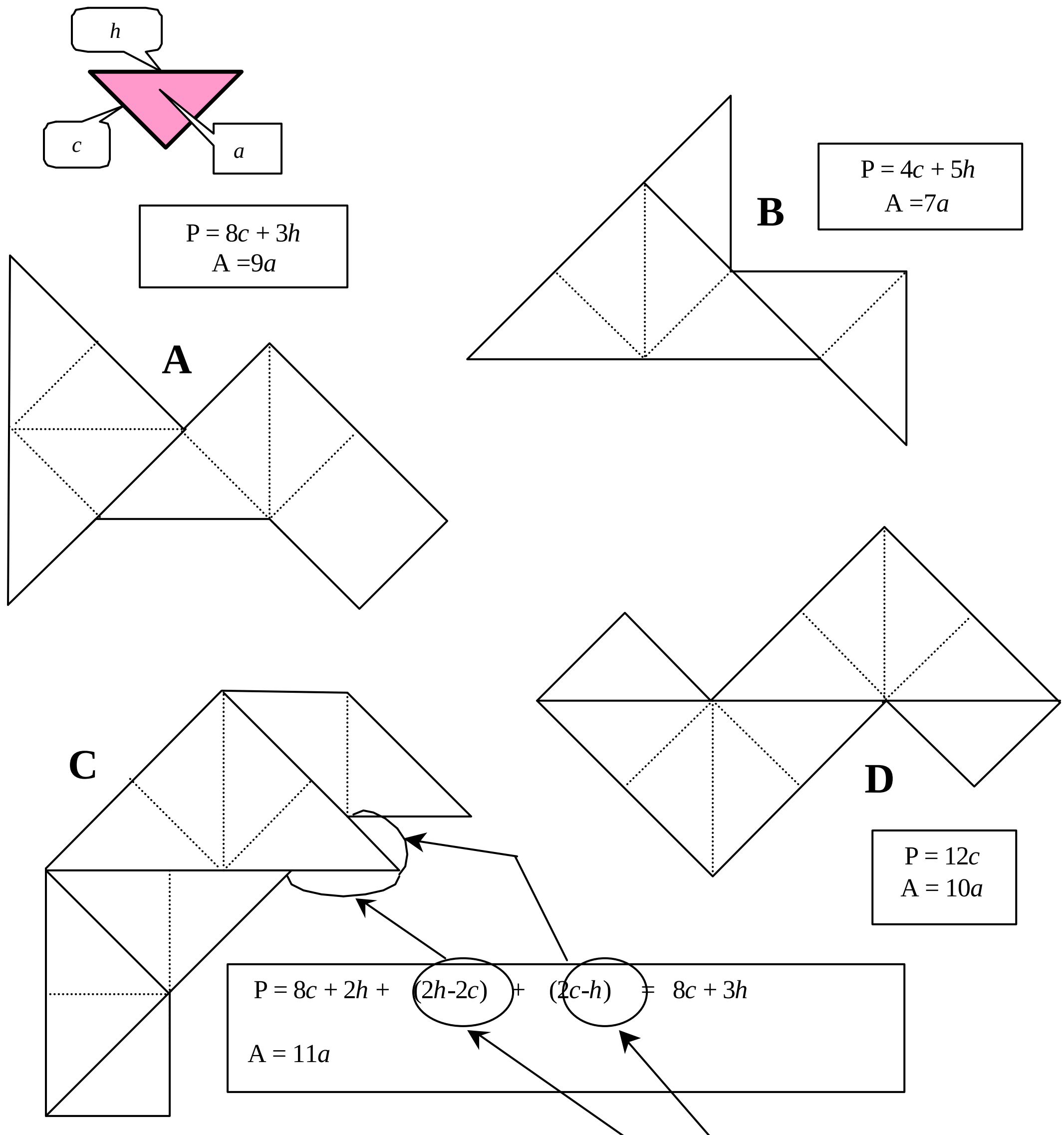


Périmètre = ___________________

Aire = ________________________

Objectif : Approche des notion de mesure d'aires et de périmètres.

Démarche : Utilisation des valeurs du triangle de base du Tan Gram dans l'analyse de différentes surfaces



Remarque :
L'expression du périmètre de la figure C pose **2 difficultés** volontairement proposées.

Comparer deux à deux les surfaces A , B, C et D

A partir des expressions obtenues, la comparaison selon les aires ne pose aucune difficulté

Aire de A > Aire de B	Aire de A < Aire de C	Aire de A < Aire de D
Aire de B < Aire de C	Aire de B < Aire de D	Aire de C > Aire de D

A partir des expressions obtenues, la comparaison selon les périmètres pose des difficultés.
Il apparaît :

1) Après réduction, **A** et **C** ont même périmètre (**8*c* + 3*h***)

2) Comparaison de **A** (8c + 3h) et **B** (4c + 5h). Après mise en évidence des termes communs (4 c + 3 h), cela revient à comparer 4 c à 2 h.

Or, 2 c étant plus grand que h (On peut faire référence à l'inégalité triangulaire)
on a 4 c > 2 h
et donc 8 c + 3 h > 4 c + 5 h (on ajoute 4 c + 3 h)
Périmètre de **A** > Périmètre de **B**

3) Comparaison de **A** (8c + 3h) et **D** (12c). Après mise en évidence des termes communs (8c), cela revient à comparer 4 c à 3 h. Ce qui n'est pas facilement déterminable.

L'objectif est justement de montrer que l'utilisation de 2 unités, sans rapport simple entre elles, pose des difficultés de comparaison des grandeurs.
Une mesure précise suffit à trancher puisque
$h = \sqrt{2}\,c$, d'où $3\,h = 3\sqrt{2}\,c \approx 4{,}24..\,c > 4c$
Donc périmètre de A > périmètre de D

4) Comparaison de **B** (4c + 5h) et de **D** (12c). Après mise en évidence des termes communs (4c), cela revient à comparer 5 h à 8 c. Ce qui n'est pas facilement déterminable.

Là encore, une mesure précise suffit à trancher puisque
$h = \sqrt{2}\,c$, d'où $5\,h = 5\sqrt{2}\,c \approx 7..\,c < 8c$
Donc périmètre de **B** < périmètre de **D**

En résumé

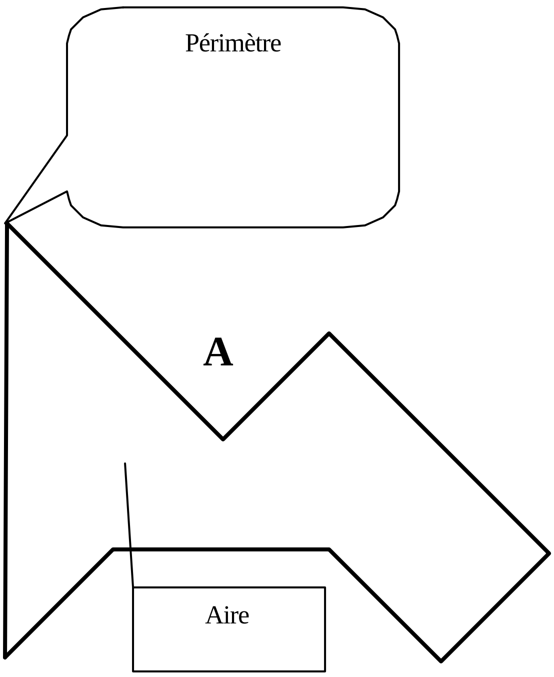
Périmètre de A > Périmètre de B	**Périmètre de A = Périmètre de C**
Périmètre de A > Périmètre de D	**Périmètre de B < Périmètre de C**
Périmètre de B < Périmètre de D	**Périmètre de C > Périmètre de D**

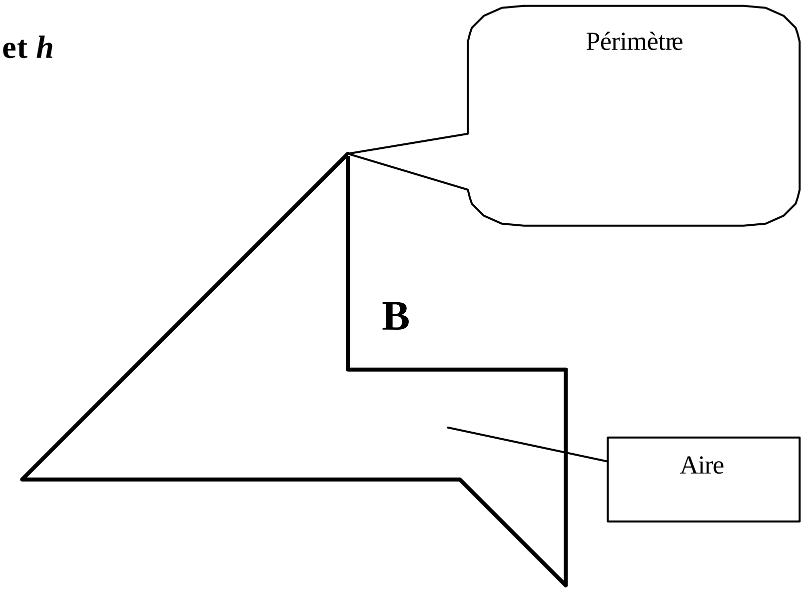
Pour chacune des surfaces suivantes :

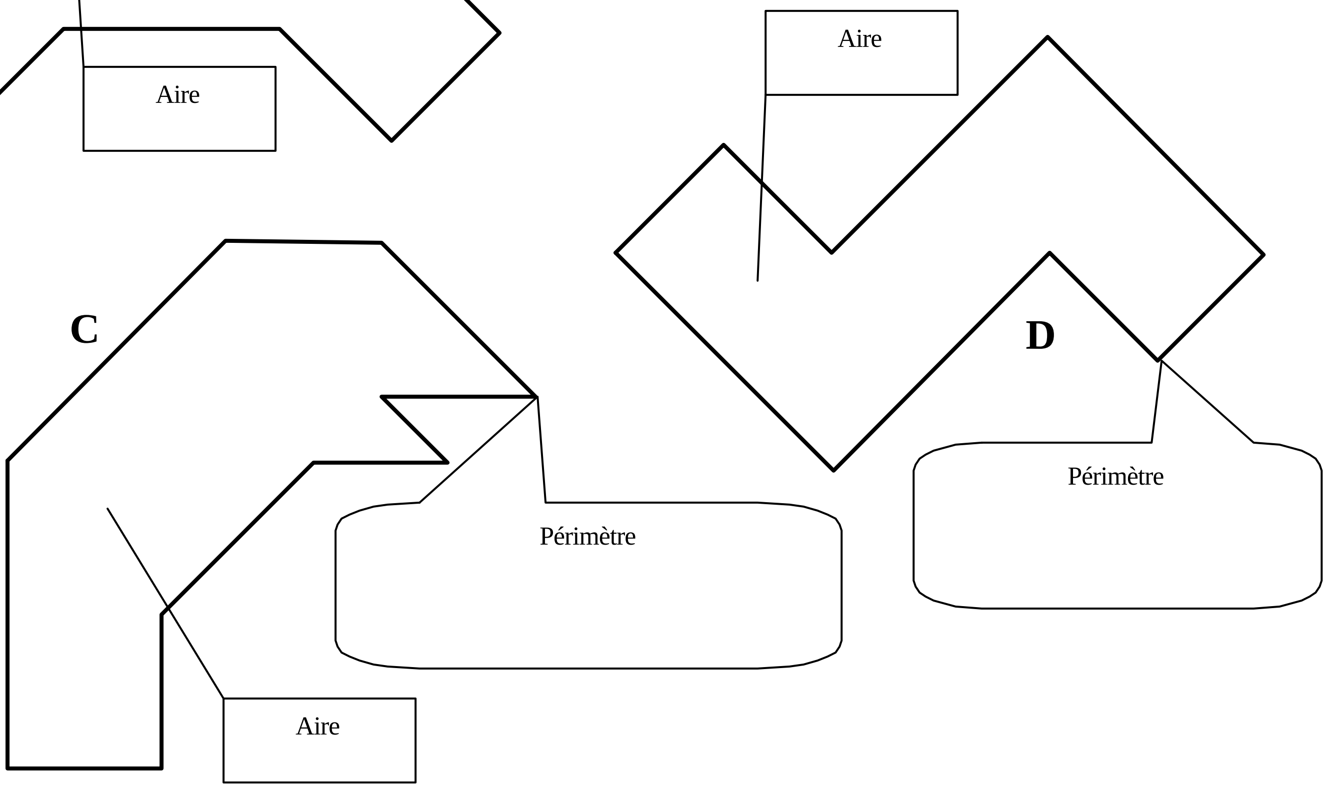
- faire apparaître les pièces du Tan gram utilisées,

puis exprimer

- **le périmètre en fonction de *c* et *h***
- **l'aire en fonction de *a***







Comparer deux à deux les surfaces A , B, C et D

Périmètre de A **Périmètre de B** **Aire de A** **Aire de B**	**Périmètre de A** **Périmètre de C** **Aire de A** **Aire de C**	**Périmètre de A** **Périmètre de D** **Aire de A** **Aire de D**
Périmètre de B **Périmètre de C** **Aire de B** **Aire de C**	**Périmètre de B** **Périmètre de D** **Aire de B** **Aire de D**	**Périmètre de C** **Périmètre de D** **Aire de C** **Aire de D**

Planche à clous

Le matériel est constitué d'une planchette sur laquelle sont plantés des clous ou des chevilles régulièrement disposés sur lesquels on tend quelques élastiques. On constitue avec ceux-ci des contours polygonaux.

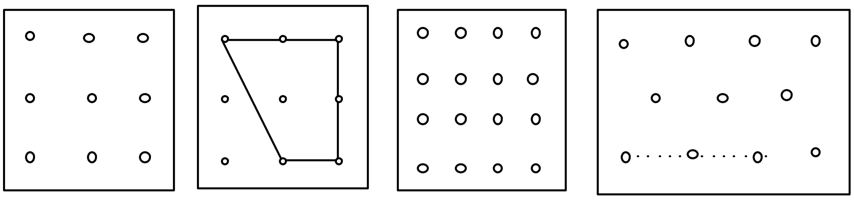


fig. 1 *fig. 2* *fig. 3* *fig. 4*

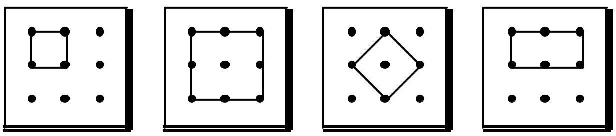
On peut envisager des planchettes à 9 clous (fig. 1 et 2), ou davantage (fig.3), ou des dispositions en quinconce (fig.4). On emploie en même temps des feuilles de papier “pointé”, sur lesquelles des points reproduisent (à la même échelle) la disposition des clous de la planche.(ces documents papiers sont fournis en Annexes de cette fiche)

Objectif : L'approche de la notion d'aire, la comparaison d’aires, voire leur évaluation peuvent être abordées sans formule ni instrument de mesure. C’est une démarche de preuve géométrique et non pas algébrique (résultant d’un calcul). Cette voie, moins habituelle, est plus accessible car s’appuyant sur des manipulations et de ce fait plus propre à (re)fonder la compréhension des notions.

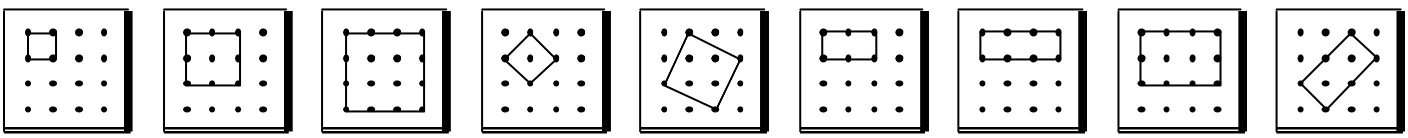
I) Catalogue de contours.

- **Fiche 7a** : Répertorier sur une feuille de papier pointé tous les carrés et les rectangles que l'on peut obtenir sur une planche à 9 clous, puis sur une planche à 16 clous. L'opération de comparaison est la superposition (après découpage si nécessaire). On ne retient que les figures non superposables entre elles (par déplacement ou retournement).

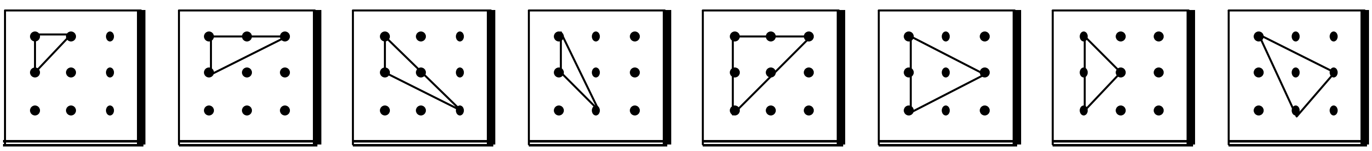
Solutions sur une planche à 9 clous ⟶



Solutions sur une planche à 16 clous

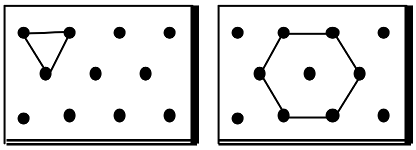


- **Fiche 7b** : Répertorier ensuite tous les triangles (Planche à 9 clous).
Combien obtient-on de triangles différents ?



Peut-on obtenir des triangles équilatéraux ? des hexagones réguliers ?
Trouver plusieurs critères permettant de classer ces triangles. (côtés égaux, angle droit, même périmètre, même aire etc). Après les avoir désignés par des lettres (A, B, C,…), représenter, dans un tableau, le classement obtenu.

Quels polygones réguliers peut-on obtenir sur la planche de la figure 4 ?

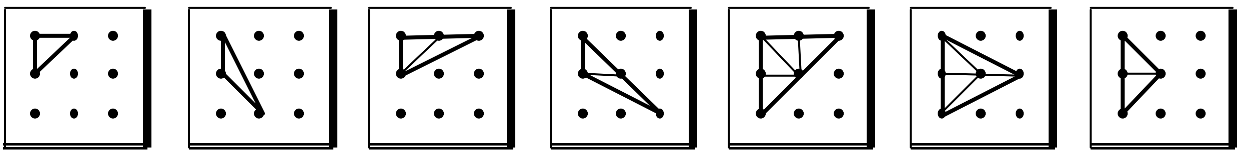


II) Approche de la notion d'aire.

- **Fiche 7c** : Montrer que tous les triangles obtenus peuvent être construits à partir d'assemblages de seulement deux triangles non superposables. Lesquels ? Dans la suite, ils seront appelés triangles de base A et B (A étant le triangle rectangle).

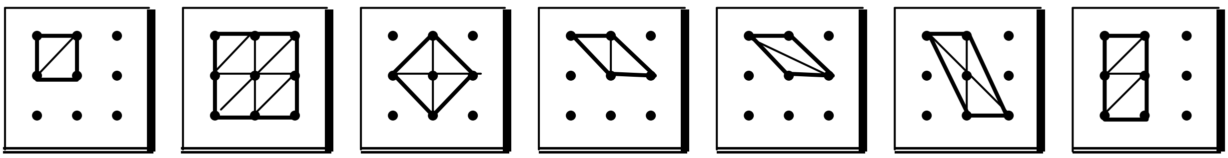
Exprimer la décomposition de tous les triangles en fonction de A et B. On utilise la notation ⊕ pour exprimer les décompositions sur les deux triangles de base.

Exemple : G se décomposant en deux triangles A, on écrit G = A ⊕ A
D se décomposant en A et B on écrit D = A ⊕ B etc.



A **B** C = A ⊕ B D = A ⊕ B E = 4A F = 2A⊕ 2B G=A⊕ A

Donner également les décompositions des carrés et des parallélogrammes que l'on peut obtenir sur la planche à 9 clous.

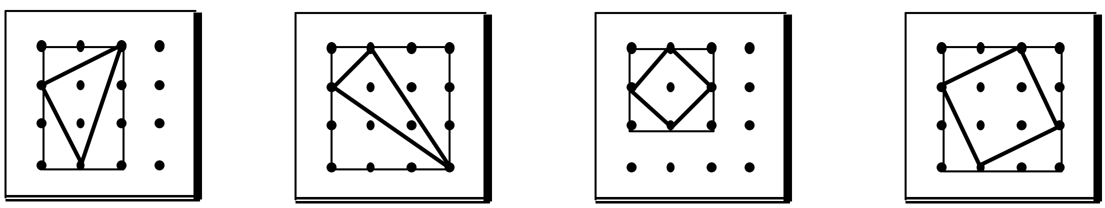


H=2A I=8A J=4A K=2A ou K=2B L=2A⊕ 2B M=4A

Déduire de ce qui précède que A et B ont même aire. les deux décompositions de K montrent directement que 2A = 2B donc que A et B ont la même aire.
La mesure de l'aire est le nombre d'unités contenues dans une surface.

ATTENTION : Ici, on prend A ou B comme unité d'aire ce qui permet de ne travailler qu'avec des nombres entiers dans les fiches suivantes.
Déduire de ce qui précède les mesures des aires de tous les triangles, carrés, parallélogrammes précédents.

- Fiche 7d : Sur une planche à 16 clous, déterminer la mesure de l'aire du triangle indiqué.
Déterminer un autre triangle de même aire, un carré dont l'aire est 4; et sur une planche à 25 clous, un carré dont l'aire est 10.



12 –2 –2 –3 = **5**	18 –6 –6 –1 = **5**	8 –1x4 = **4**	18 –4x2= **10**

III) Formule de Pick[1].

- Fiche 7e : Pour chaque polygone on appelle N le nombre de clous situés sur le pourtour et P le nombre de clous situés à l'intérieur (ainsi pour A : N=3 et P=0). Reporter dans le tableau qui suit les noms des figures étudiées jusqu'ici dans la case qui leur convient, ainsi que la mesure S de leur aire.

	P=0				
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7
Nom	A B	C D G H K		E M	
Aire	1	2		4	

	P=1					
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
Nom		F J L				I
Aire		4				8

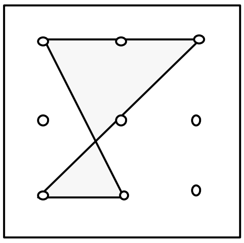
Que remarque-t-on concernant les surfaces se trouvant dans une même case ?

Réponse : Elles ont la même aire. Les valeurs de N et de P semblent déterminer l'aire de la surface .

Vérifier sur quelques polygones que S, N, P sont liés par la relation :

$$S = N - 2 + 2P$$

- On appelle "quadrilatère croisé" la figure représentée ci-contre. Montrer que la relation obtenue précédemment ne peut lui être appliquée.



[1] 1899

Annexes

Planche à mailles carrés

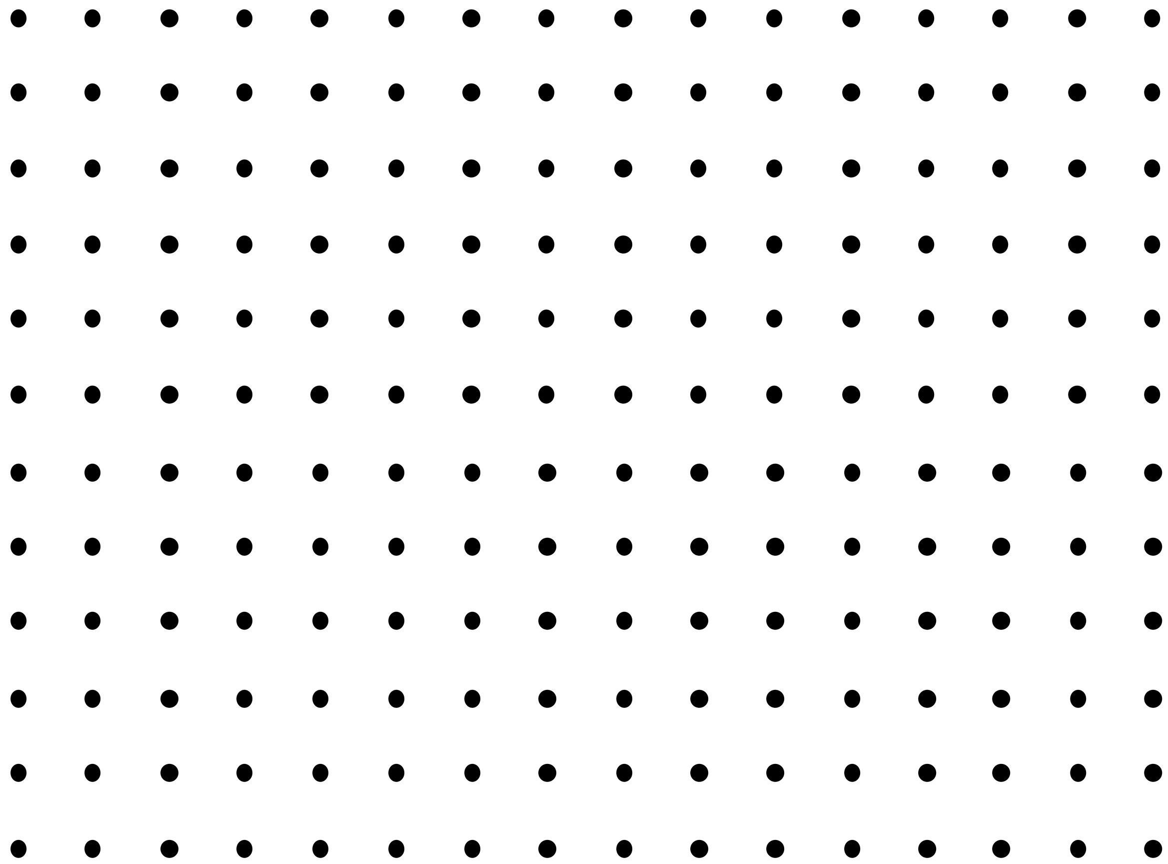
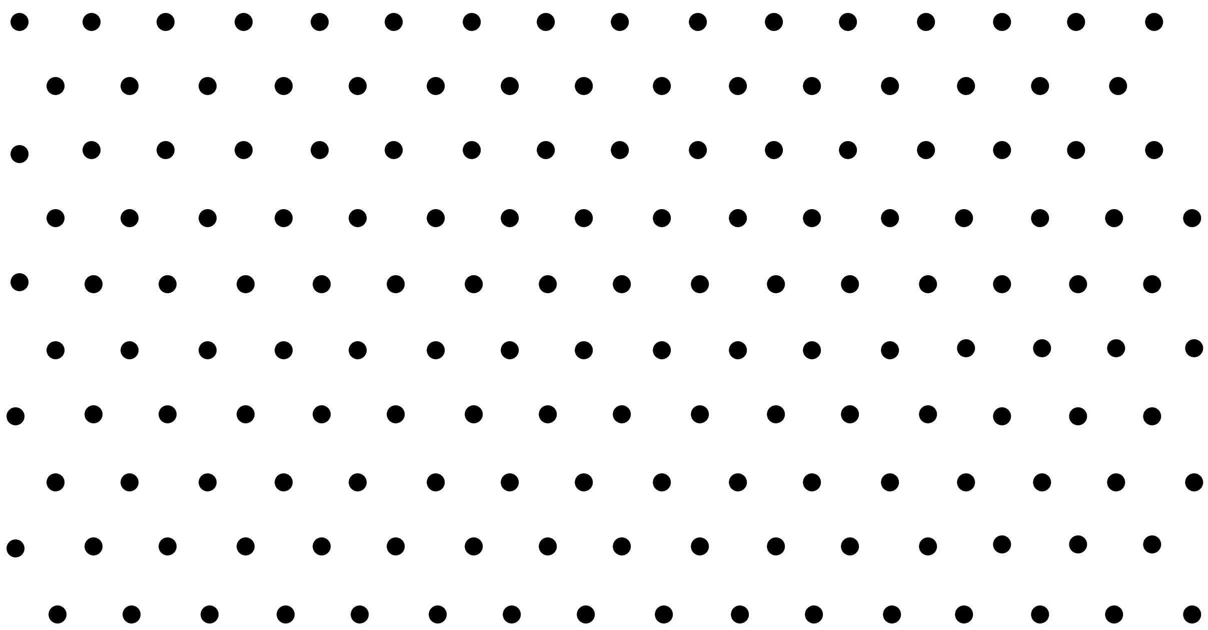
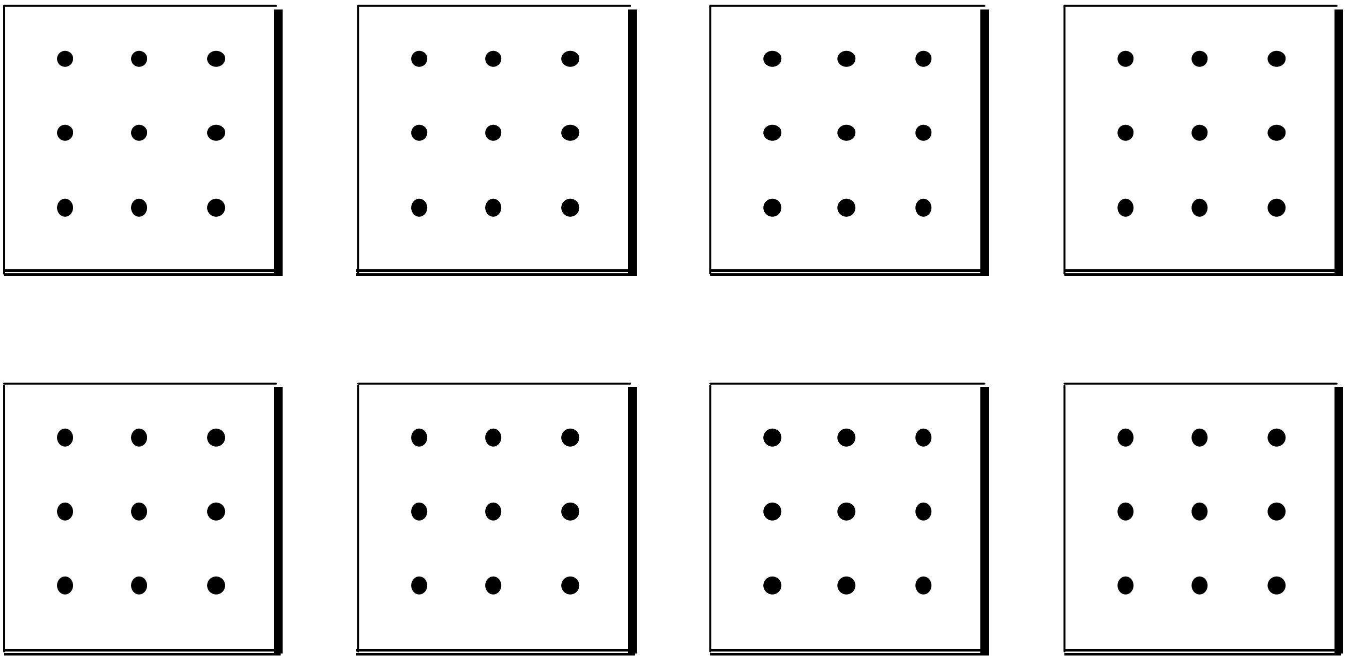


Planche à mailles triangulaires (Triangles équilatéraux)

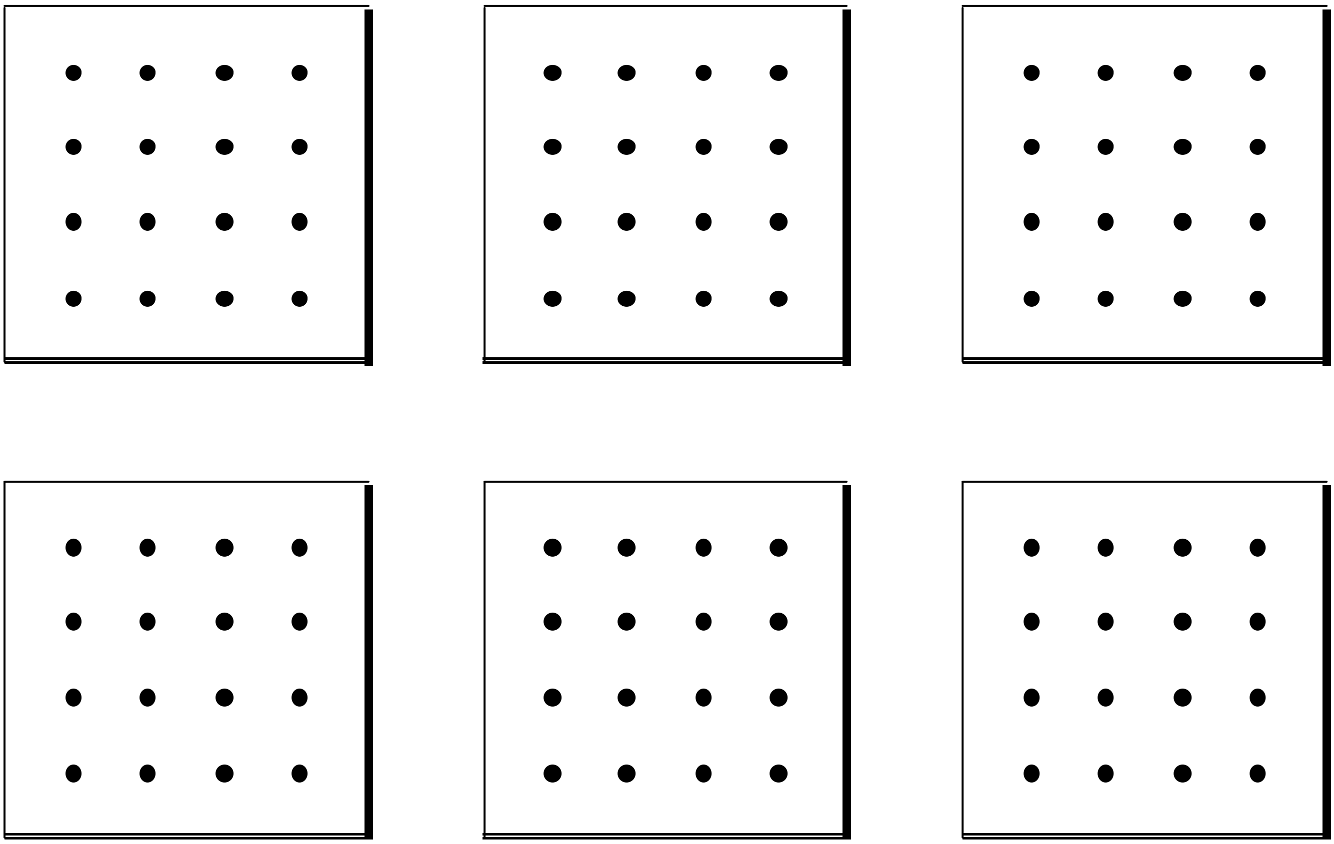


Annexes

Planchettes à 9 clous

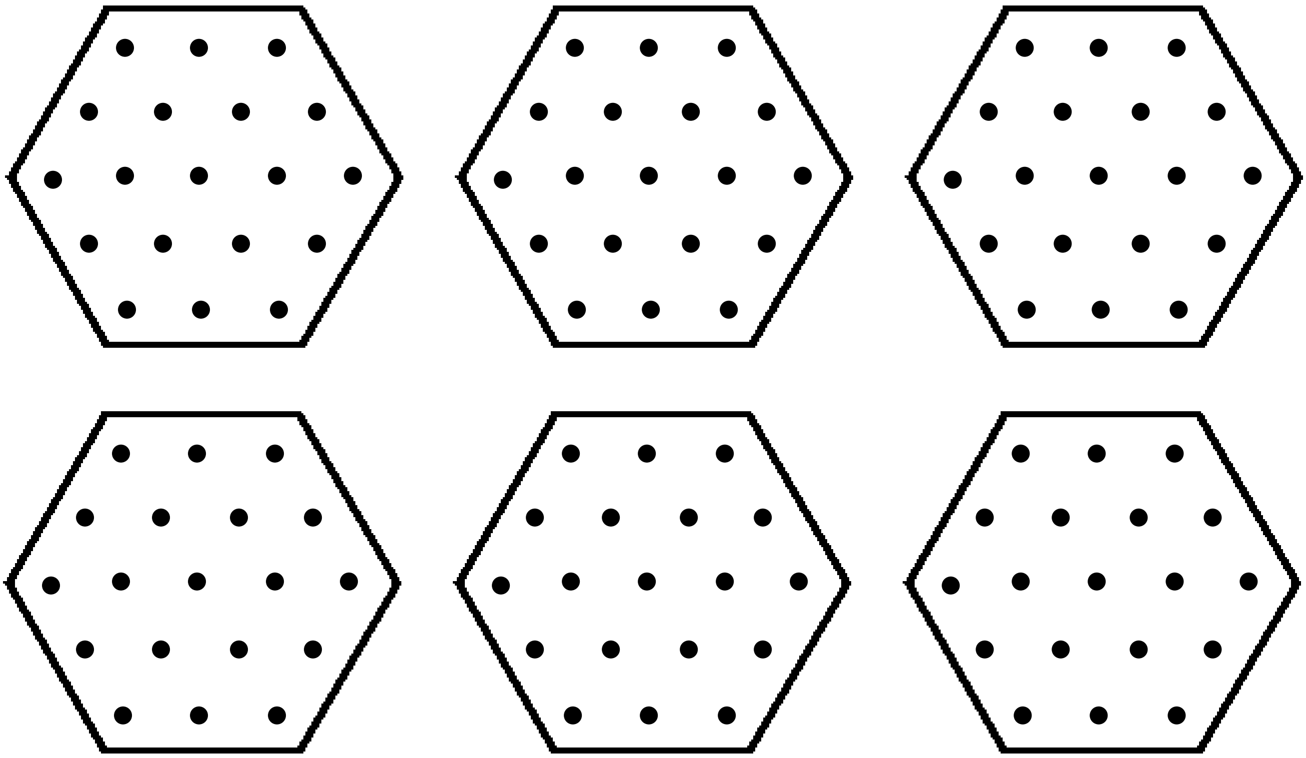


Planchettes à 16 clous

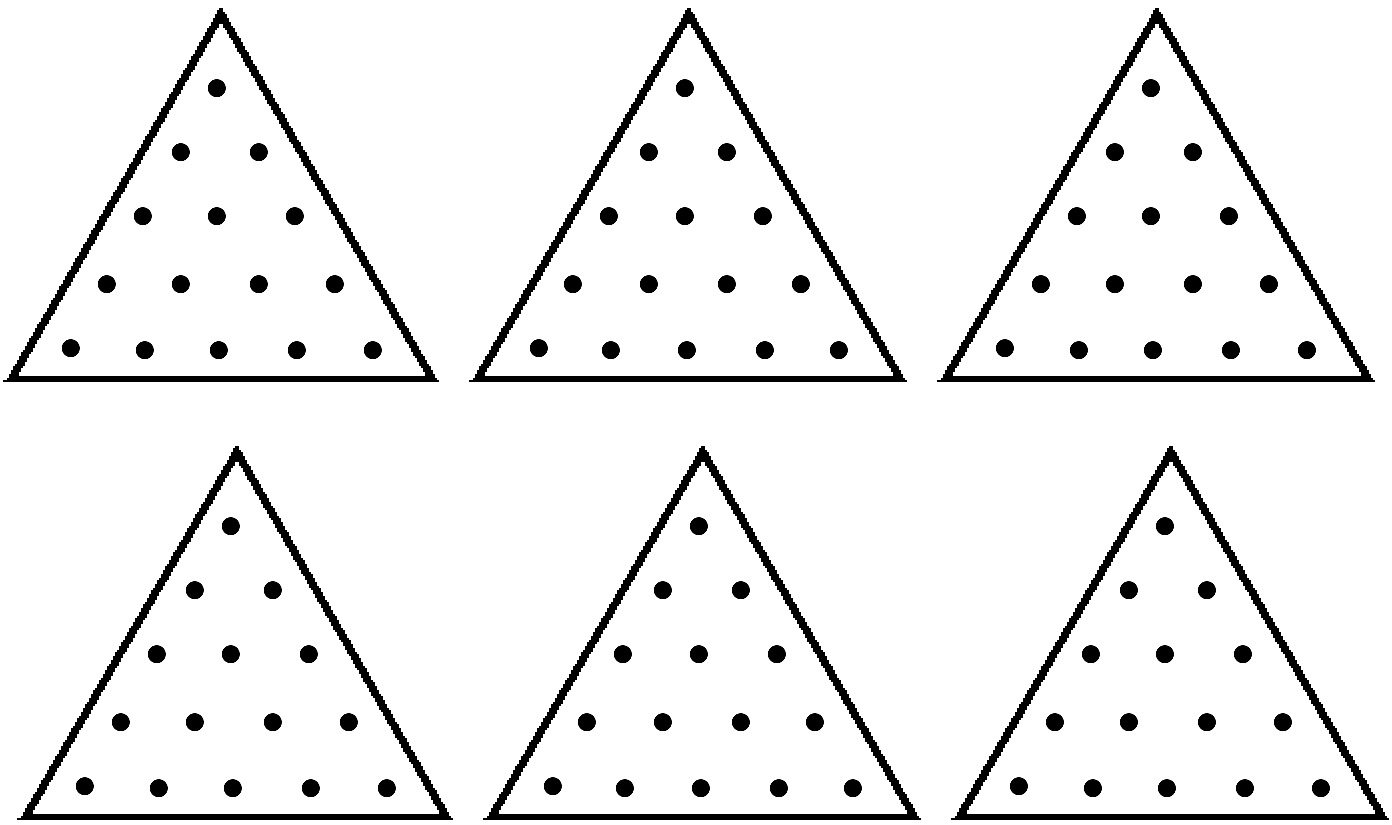


Annexes

Mailles Triangles équilatéraux (Planche hexagonale)

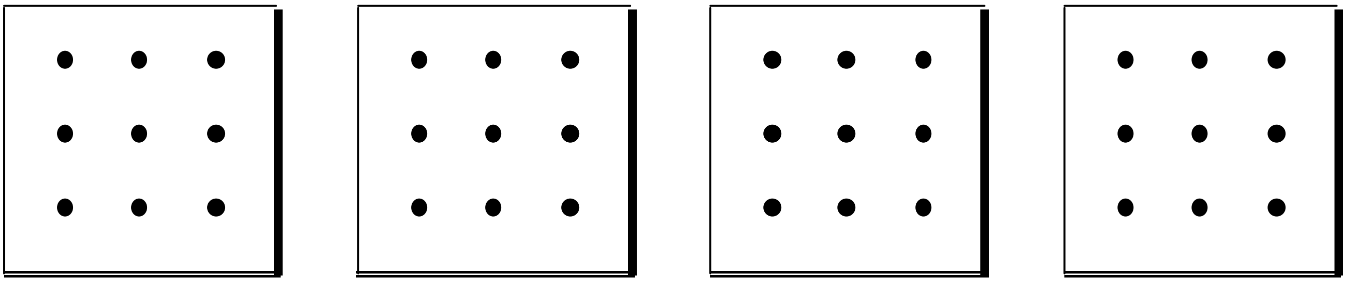


Mailles Triangles équilatéraux (Planche triangulaire)



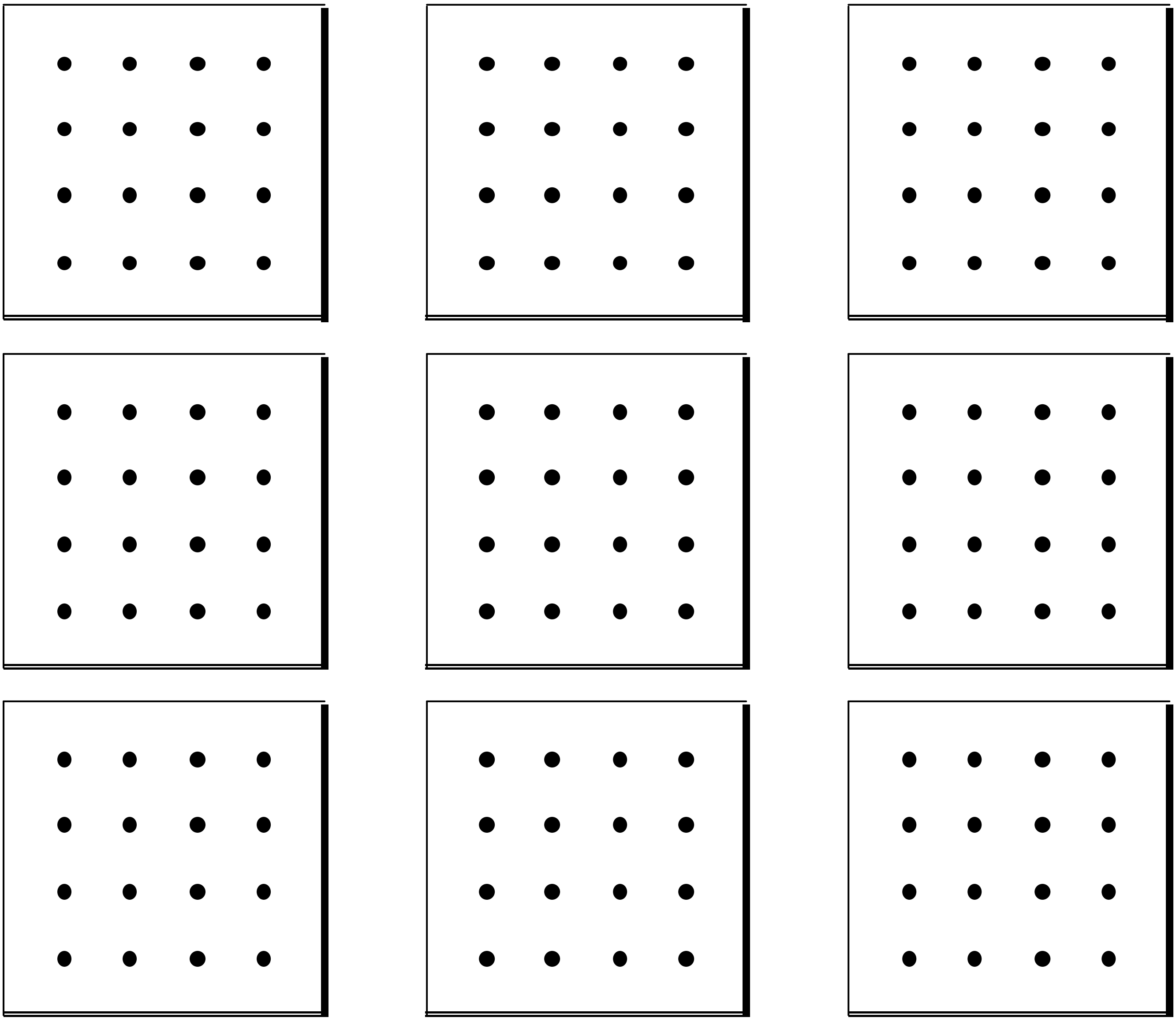
Planchettes à 9 clous

- Inventaire des carrés et des rectangles



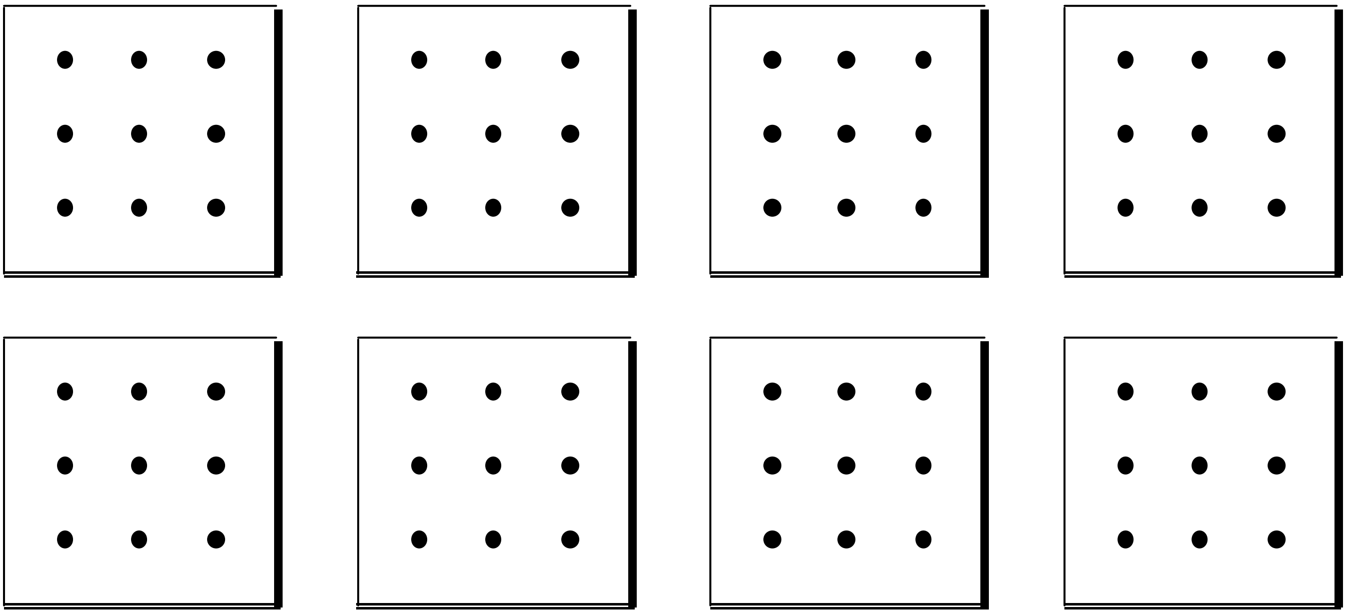
Planchettes à 16 clous

- Inventaire des carrés et des rectangles



Planchettes à 9 clous

- Inventaire des triangles



- Peux-t-on obtenir un triangle équilatéral ? un hexagone régulier ?

____

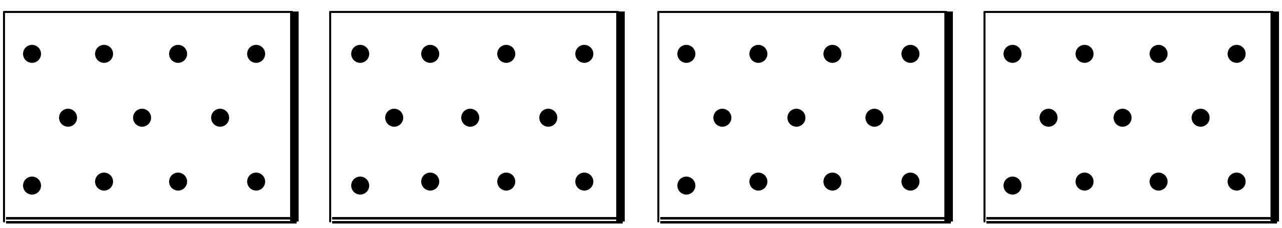
____

- Critères de classement :

____

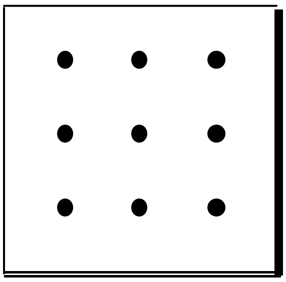
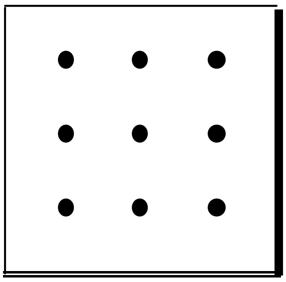
____

- Recherche des polygones réguliers sur la planchettes de 11 clous à mailles triangulaires

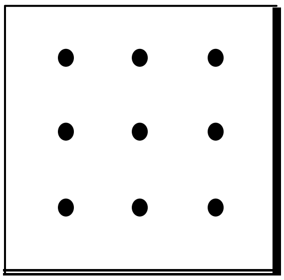
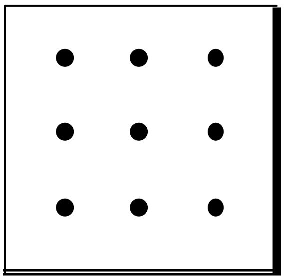
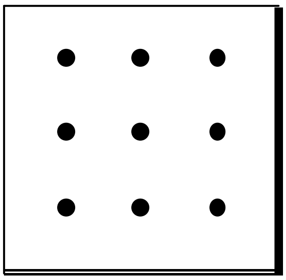
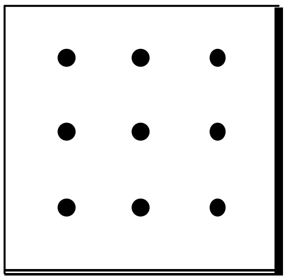
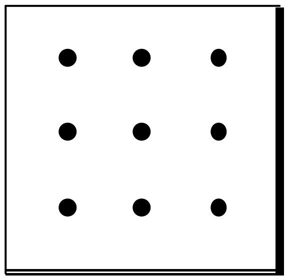


Planchettes à 9 clous

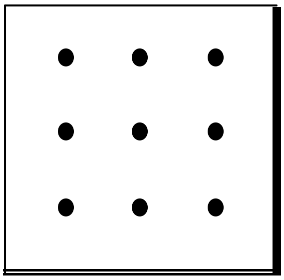
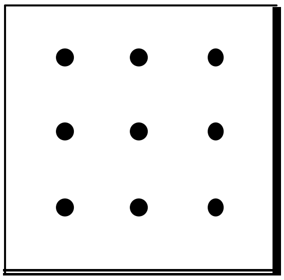
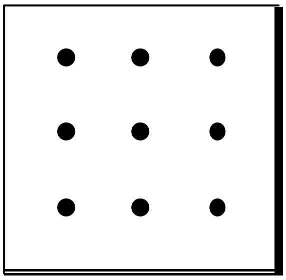
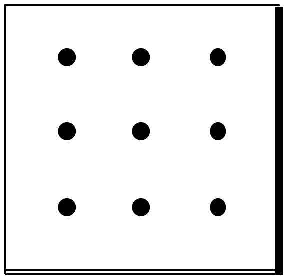
- Repérage des 2 triangles de bases A et B

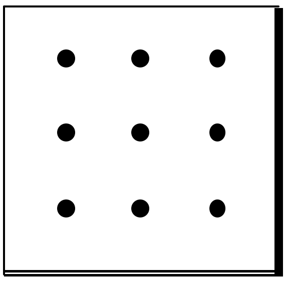
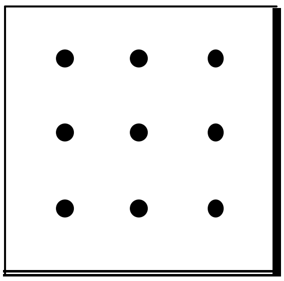
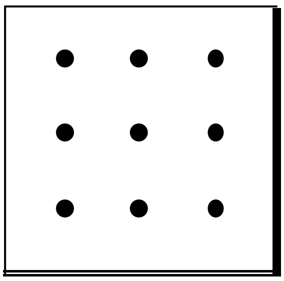
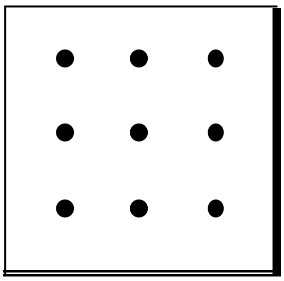



- Expression des autres triangles à partir de A et B

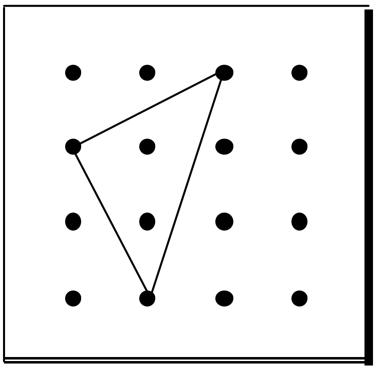
- Recherche et Expression des carrés et des parallélogrammes.

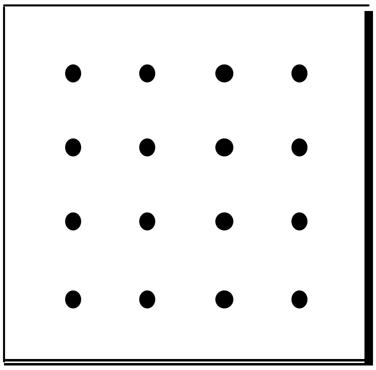
Planchettes à 16 clous

- Déterminer la mesure de l'aire du triangle ci-dessous.

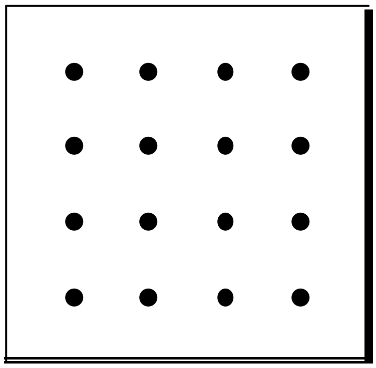


Aire du triangle : ______________________

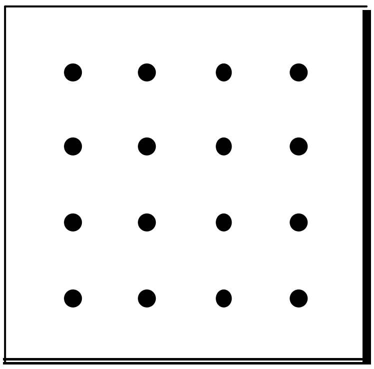
- **Déterminer sur une planchette à 16 clous:**
  - **un autre triangle de même aire**



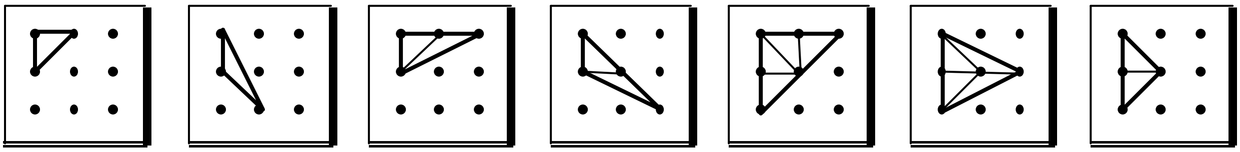
  - **un carré dont l'aire est 4**



  - **un carré dont l'aire est 10.**

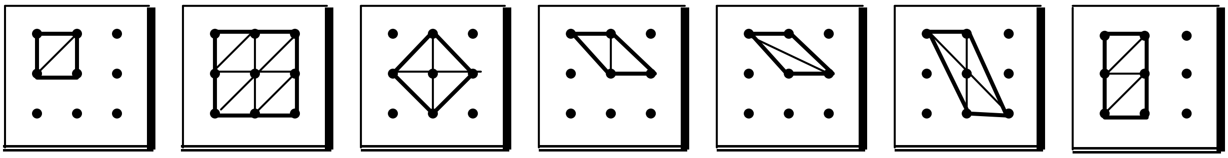


Les différents triangles



A | **B** | C = A⊕ B | D = A⊕ B | E = 4A | F = 2A⊕ 2B | G=A⊕ A

Les différents carrés, rectangles et parallélogrammes



H=2A | I=8A | J=4A | K=2A ou K=2B | L=2A⊕ 2B | M=4A

Pour chaque polygone on appelle N le nombre de clous situés sur le pourtour et P le nombre de clous situés à l'intérieur (ainsi pour A : N=3 et P=0).
Reporter dans le tableau qui suit les noms des figures étudiées jusqu'ici dans la case qui leur convient, ainsi que la mesure S de leur aire.

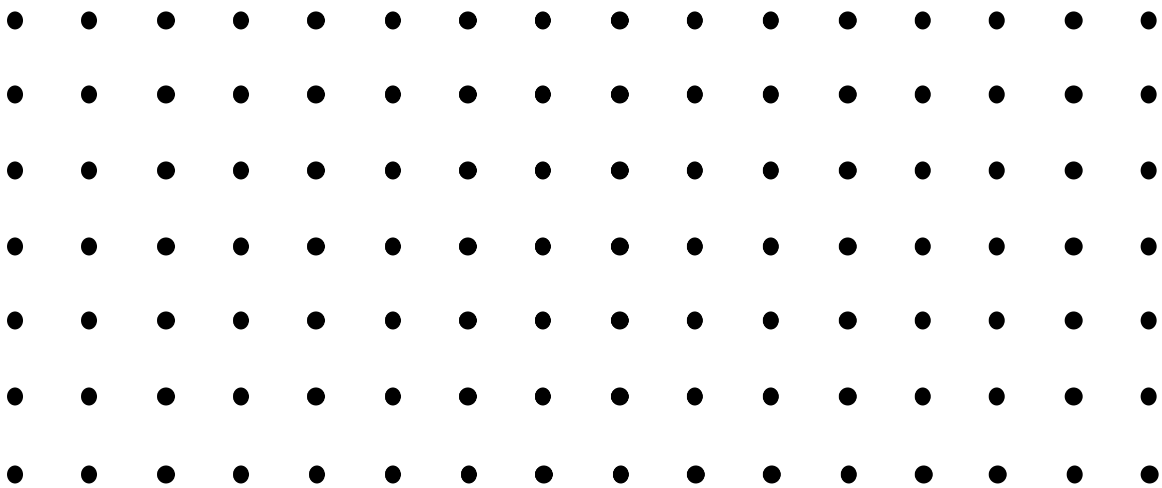
	P=0					P=1					
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8
Nom											
Aire											

Que remarque-t-on concernant les figures se trouvant dans une même case ?

Réponse : ____

Etablir une relation liant N, P, S.

Vérifier cette formule sur quelques polygones convexes.



Assemblage – Découpage

Objectif :

Faire comprendre que lorsqu'on multiplie les longueurs par k, les aires sont multipliées par k^2, ce sans s'appuyer sur des formules algébriques.

Fiche 8a : Agrandissement (rapport 2 et 3) et réduction (rapport 1/2 et 1/3) d'un carré. Analyse de la variation correspondante des aires.

Forme	C2	C1
Dimensions du côté par rapport à C	1/2	2
Aire par rapport à C	1/4	4

C4	C3
1/3	3
1/9	9

Fiche 8b : Agrandissement (rapport 2 et 3) et réduction (rapport 1/2 et 1/3) d'un triangle équilatéral. Analyse de la variation correspondante des aires.

Forme	T2	T1
Dimensions du côté par rapport à T	1/2	2
Aire par rapport à T	1/4	4

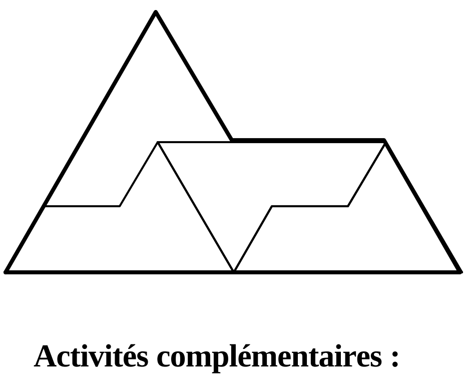
T4	T3
1/3	3
1/9	9

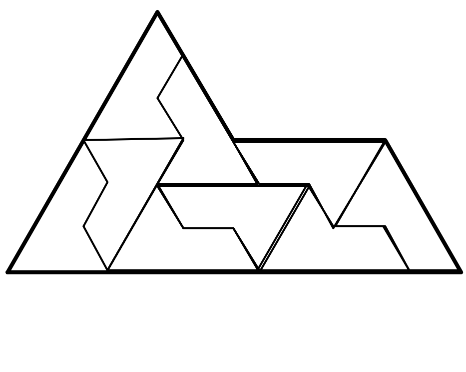
Fiche 8c : Agrandissement (rapport 2 et 3) et réduction (rapport 1/2 et 1/3) d'une forme originale « le Sphinx » . Analyse de la variation correspondante des aires.

Forme	S2	S1
Dimensions du côté par rapport à S	1/2	2
Aire par rapport à S	1/4	4

S4	S3
1/3	3
1/9	9

Assemblage-Découpage





Activités complémentaires :

Fiche 8d : Tracer le découpage du sphinx en 16 sphinx identiques

Fiche 8e : Réaliser l'assemblage à partir des 25 petits sphinx

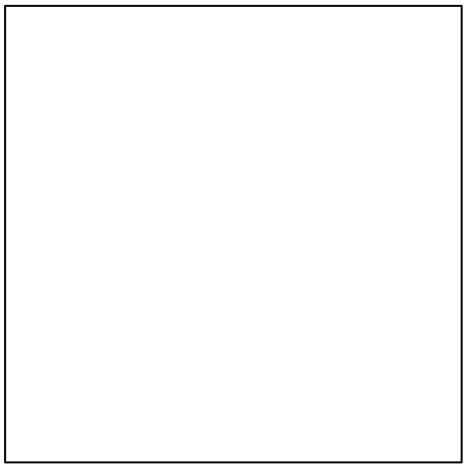
Assemblage – Découpage

I) En utilisant les pièces fournies fabriquer un carré C1 dont le côté a une longueur double de celle du côté de C.

Tracer un découpage du carré C en carrés identiques C2 dont les côtés ont une longueur égale à la moitié de ceux de C

Compléter alors le tableau suivant

C



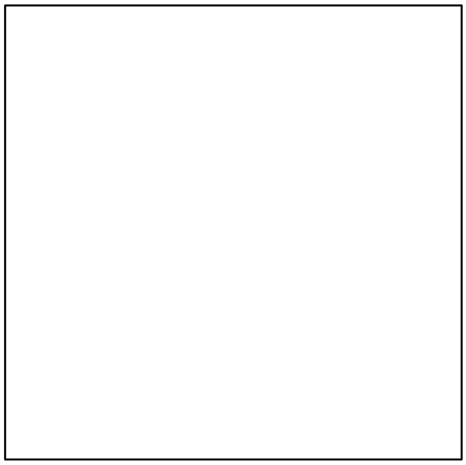
Forme	C2	C1
Dimensions du côté par rapport à C		
Aire par rapport à C		

II) En utilisant les pièces fournies fabriquer un carré C3 dont le côté a une longueur triple de celle du côté de C.

Tracer un découpage du carré C en carrés identiques C4 dont les côtés ont une longueur égale au tiers de ceux de C

Compléter alors le tableau suivant

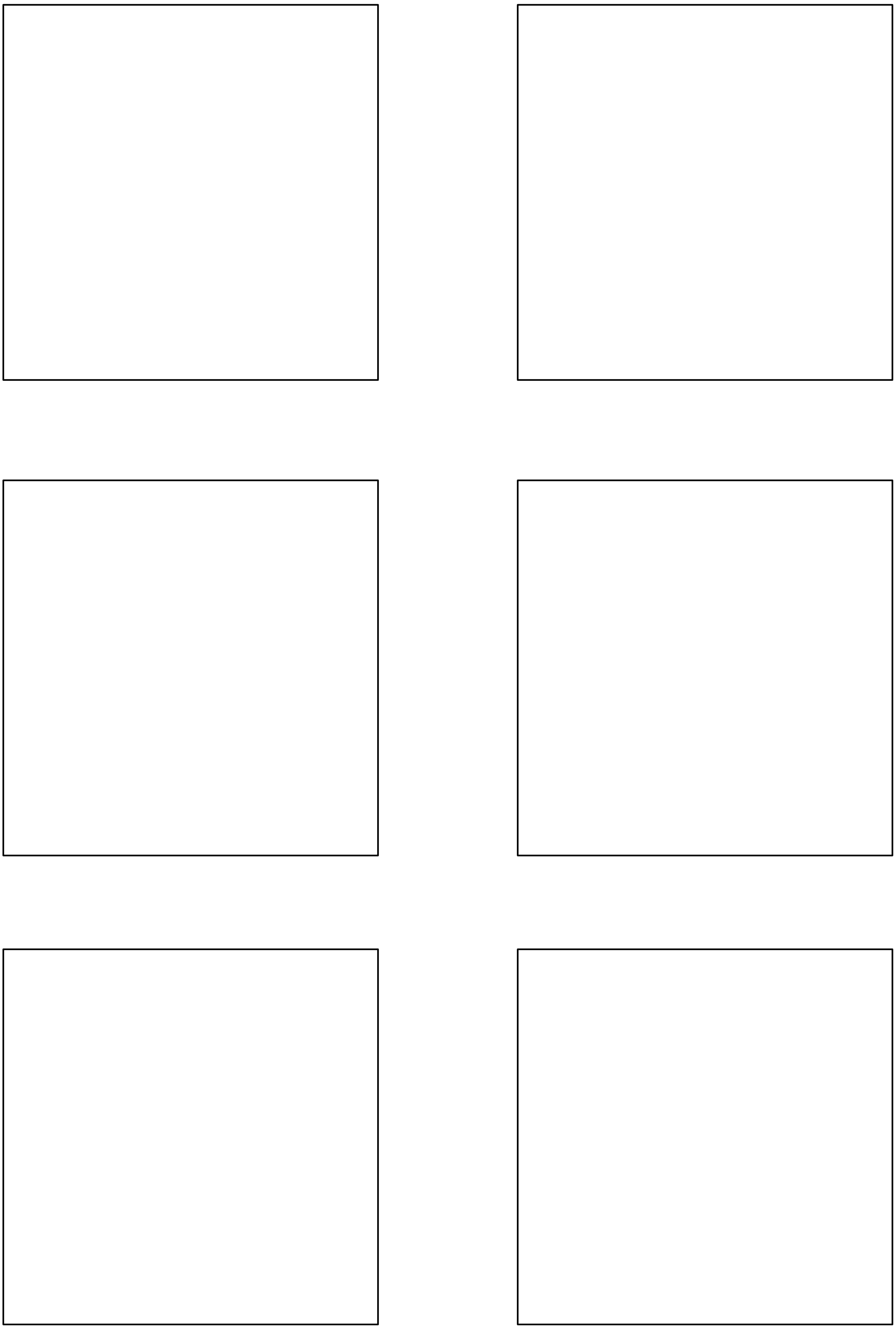
C



Forme	C4	C3
Dimensions du côté par rapport à C		
Aire par rapport à C		

Que remarque-t-on ?

Annexe activité 8a : Carrés à découper

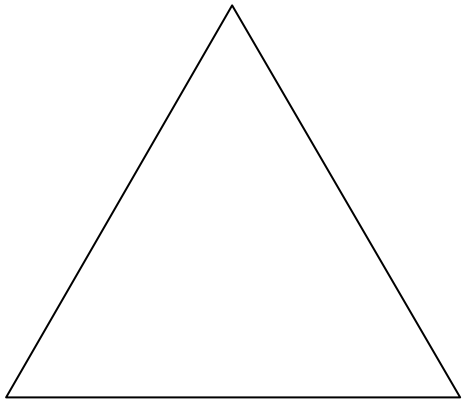


Assemblage – Découpage

I) **En utilisant les pièces fournies fabriquer un triangle T1 dont le côté a une longueur triple de celle du côté de T.**

Tracer un découpage du triangle T en triangles identiques T2 dont les côtés ont une longueur égale à la moitié de ceux de T

T



Compléter alors le tableau suivant

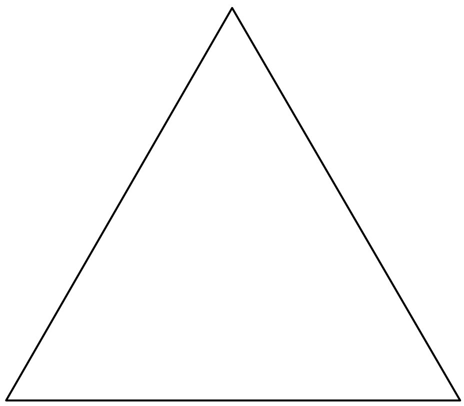
Forme	T2	T1
Dimensions du côté par rapport à T		
Aire par rapport à T		

II) **En utilisant les pièces fournies fabriquer un triangle T3 dont le côté a une longueur triple de celle du côté de T.**

Tracer un découpage du triangle T en triangles identiques T4 dont les côtés ont une longueur égale au tiers de ceux de T

Compléter alors le tableau suivant

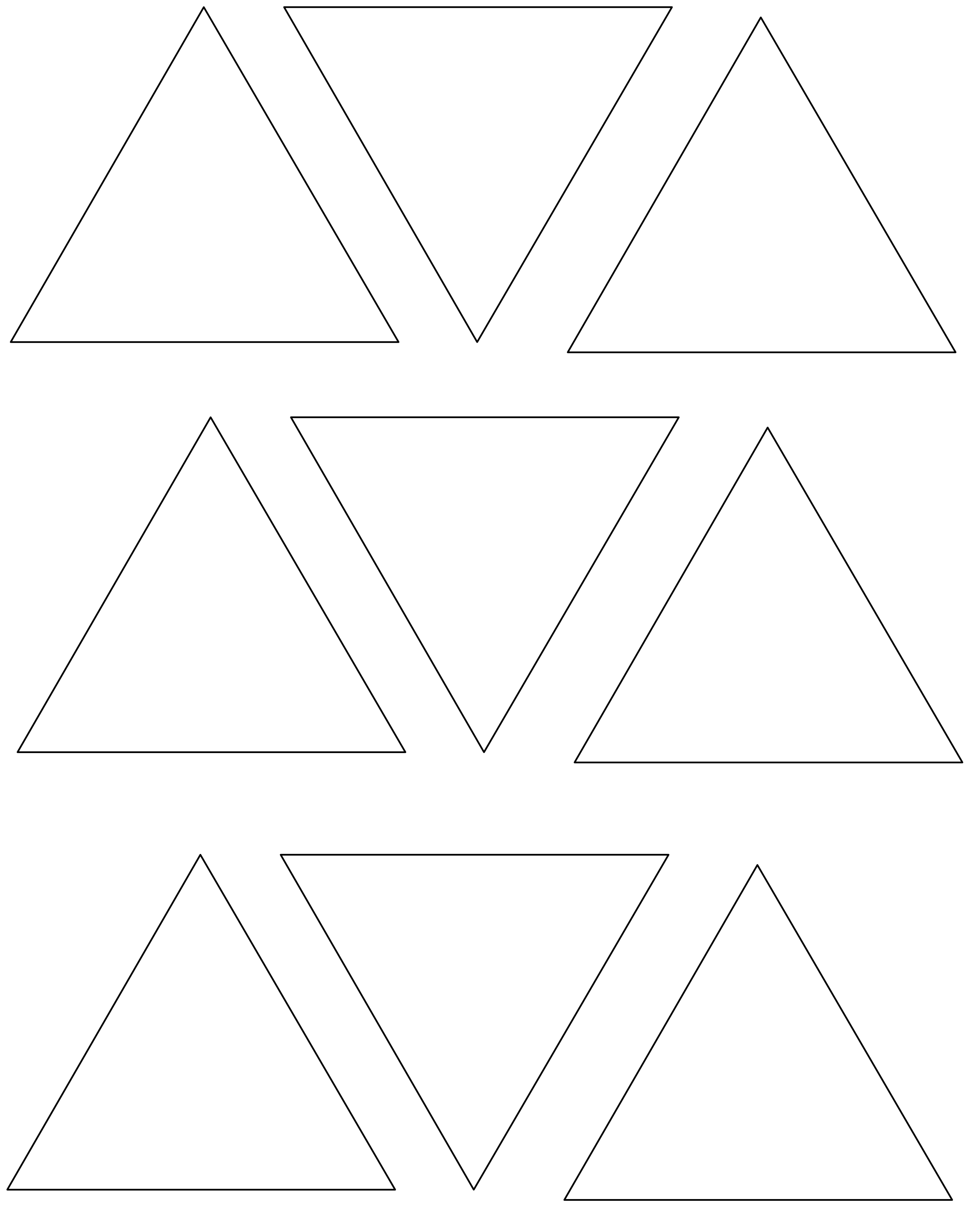
C



Forme	T4	T3
Dimensions du côté par rapport à T		
Aire par rapport à T		

Que remarque-t-on ?

Annexe activité 8b : Triangles à découper



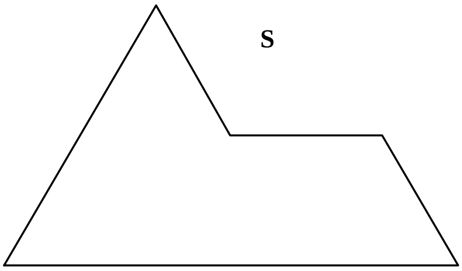
Assemblage – Découpage

I) En utilisant les pièces fournies fabriquer un sphinx S1 dont le côté a une longueur double de celle du côté de S.

Tracer un découpage du sphinx S en sphinx identiques S2 dont les côtés ont une longueur égale à la moitié de ceux de S

Compléter alors le tableau suivant

Forme	S2	S1
Dimensions du côté par rapport à S		
Aire par rapport à S		

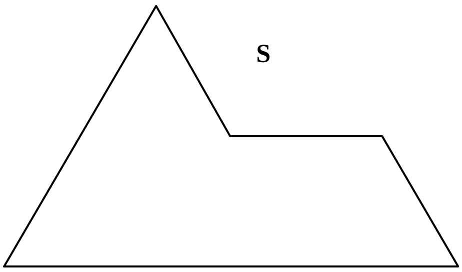


II) En utilisant les pièces fournies fabriquer un sphinx S3 dont le côté a une longueur triple de celle du côté de S.

Tracer un découpage du sphinx S en sphinx identiques S4 dont les côtés ont une longueur égale au tiers de ceux de C

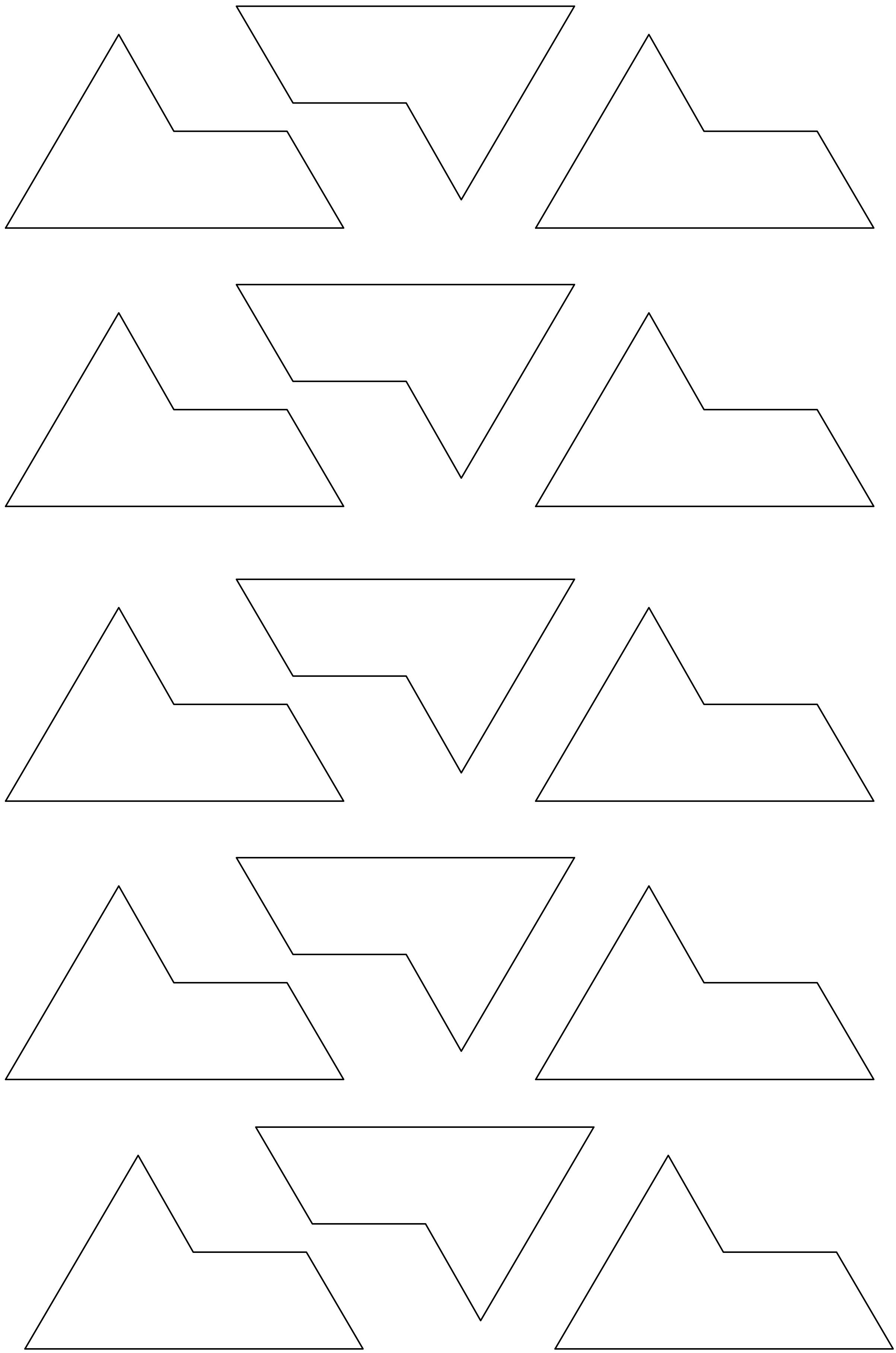
Compléter alors le tableau suivant

Forme	S4	S3
Dimensions du côté par rapport à S		
Aire par rapport à S		

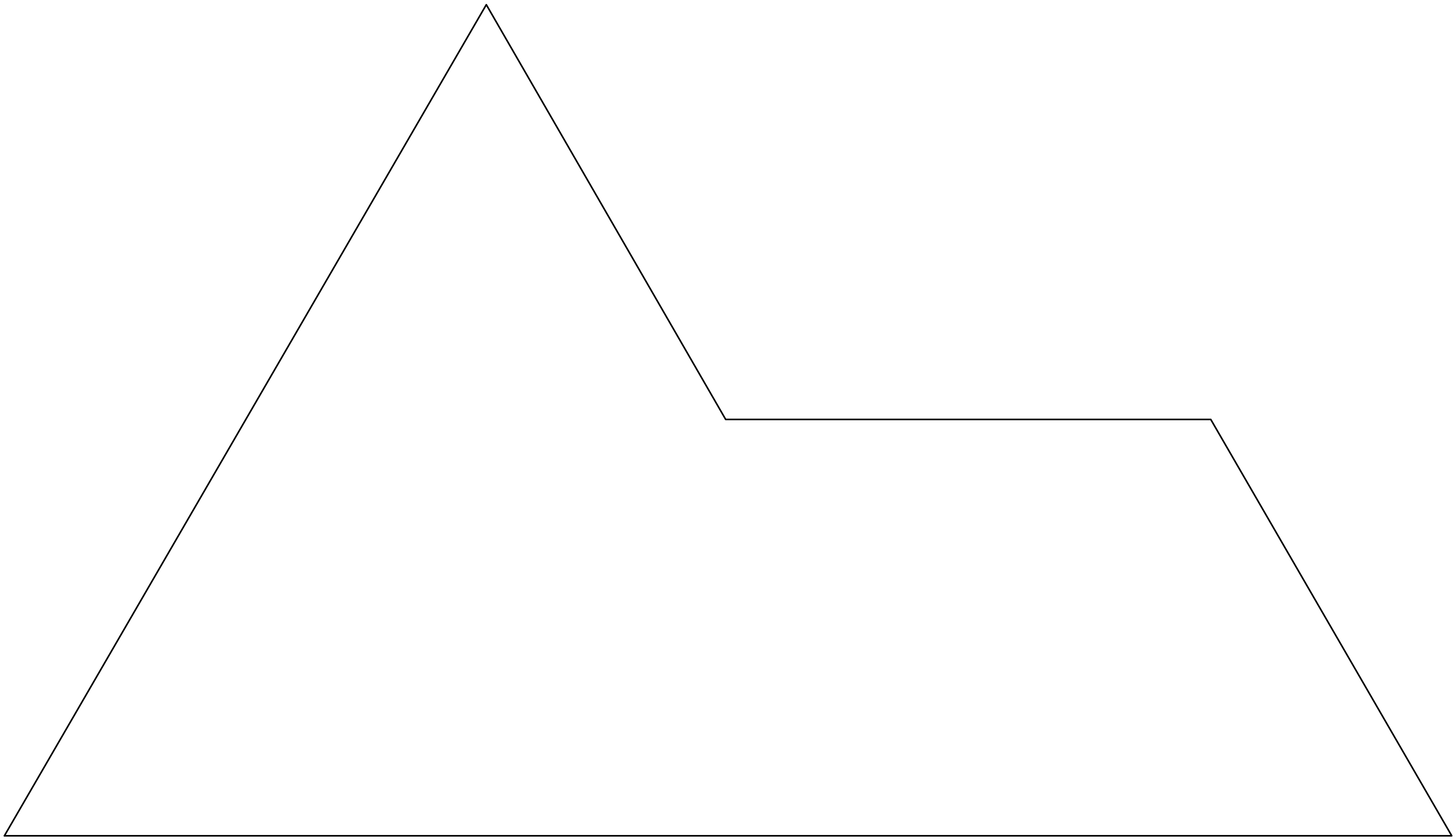


Que remarque-t-on ?

Annexe activité 8c : Sphinx à découper



Tracer un découpage en 16 sphinx identiques de ce sphinx.

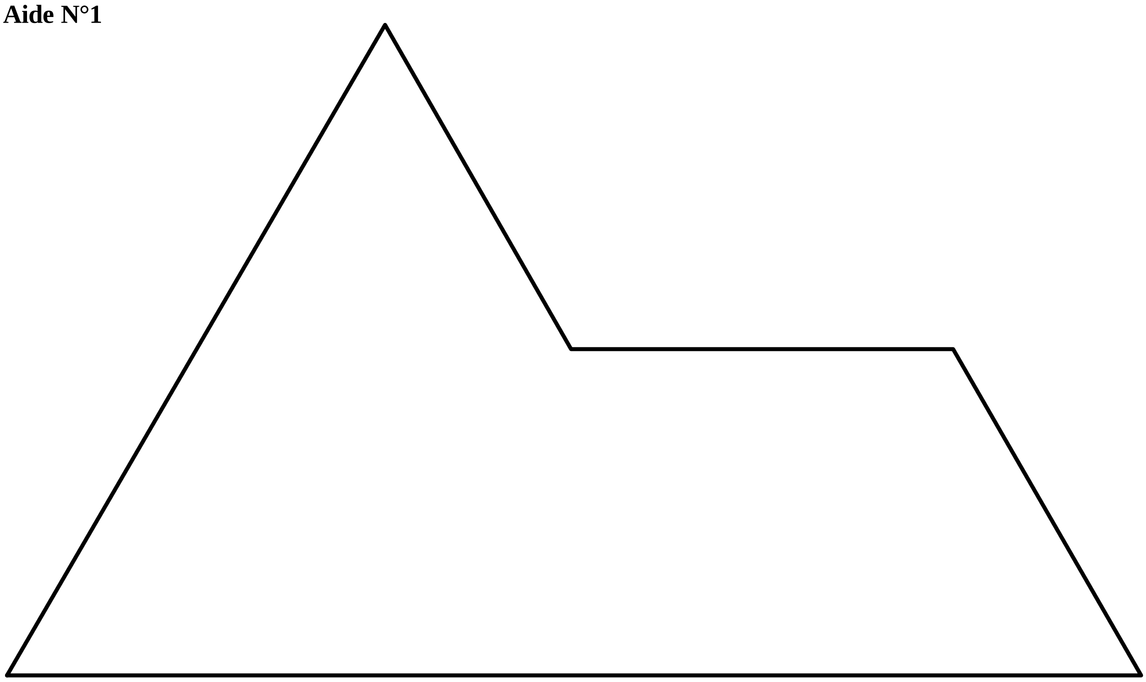


En utilisant ces 25 sphinx, réaliser un grand sphinx

Cette recherche peut se faire :

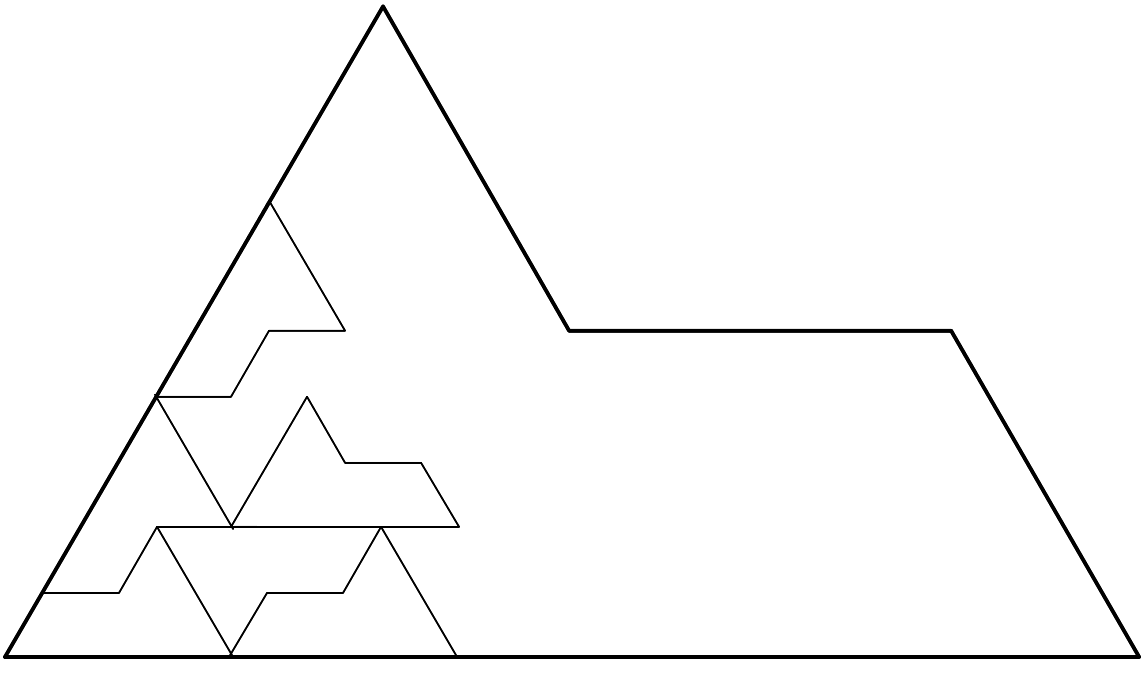
- sans aide
– avec l’aide N° 1
- avec l’aide N° 2

Aide N°1

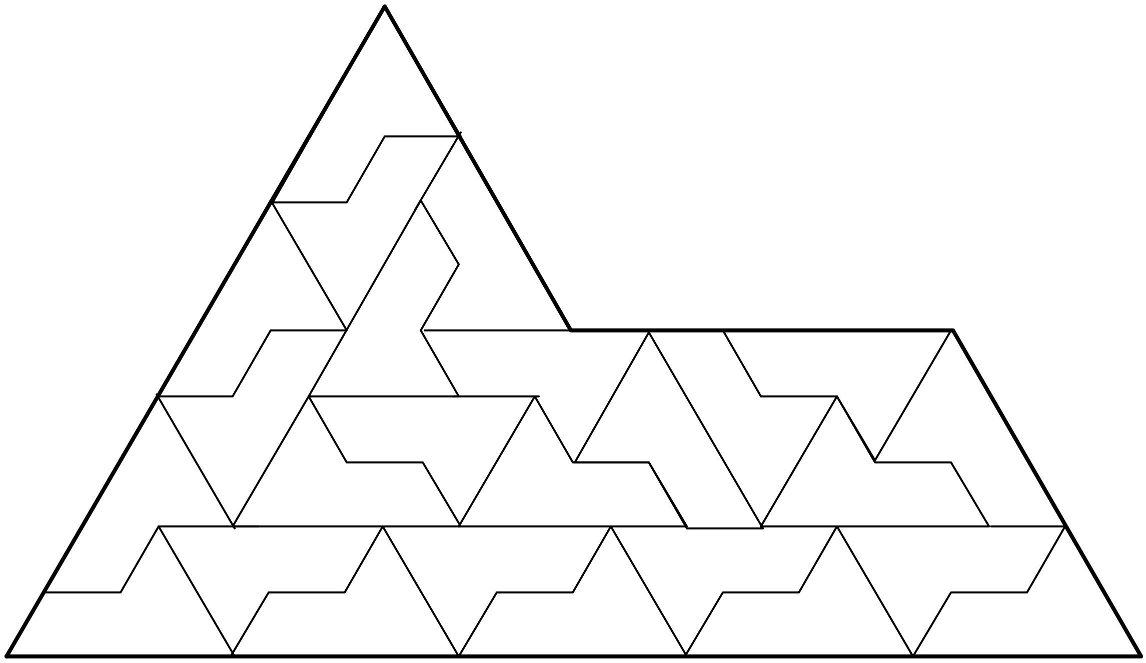


✂--

Aide N°2



Solution



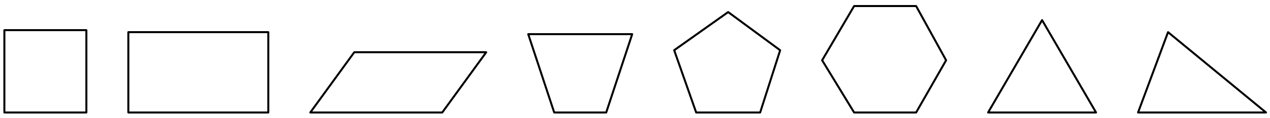
Remarque : Ces activités ne font appel à aucun document spécifique.
Il n'y a donc pas de fiche élève correspondante

Pavage[1]

Objectifs :

Etude de pièces permettant ou non le pavage du plan.
Fabrication de formes permettant le pavage du plan.

I) Pour chacune des pièces suivantes, rechercher si elles peuvent ou non s'assembler (sans se superposer) pour former un pavage.



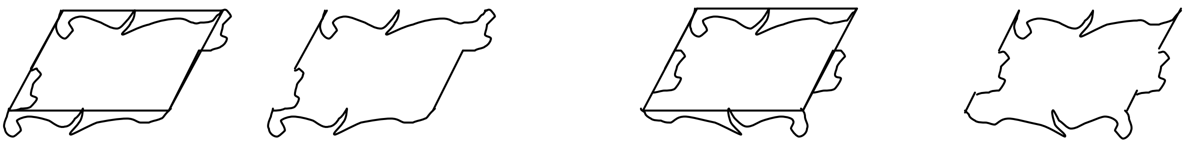
Carré	Rectangle	parallélogramme	Trapèze	Pentagone régulier	Hexagone régulier	Tri. équil	Tri.qcq

Remarques :
- Parmi ces formes, seul le pentagone régulier ne permet pas le pavage. Parfois utilisé en carrelage, il est complété par un cabochon.
- Certains assemblages peuvent jouer sur des décalages, classiquement utilisés par les carreleurs.

II) Produire des formes originales autocouvrantes.

A) Exemple à partir d'un parallélogramme .

Découpe | Découpe

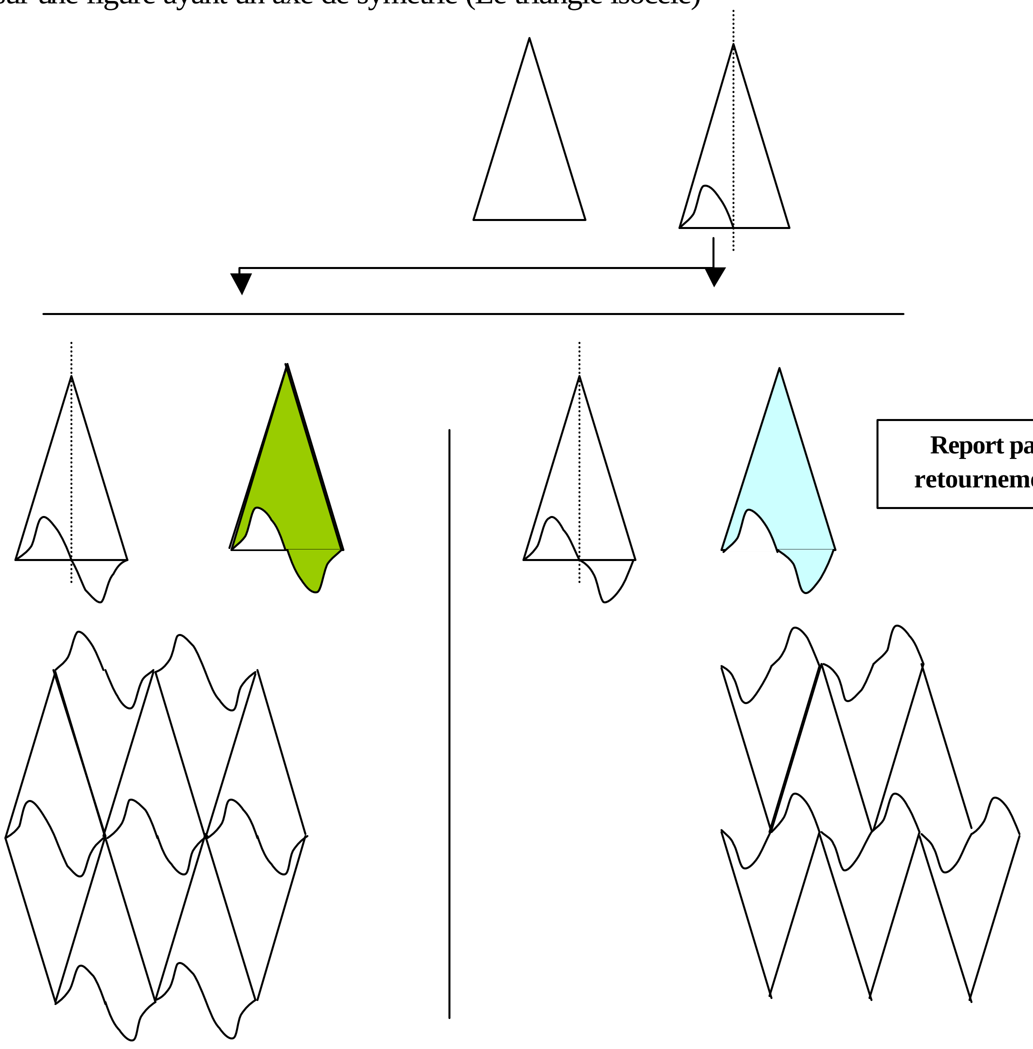


Report par translation sur les côtés opposés Ici l'une des translations se fait en "diagonale"	Forme obtenue
Pavage	

Report : - par translation pour l'une des pièces - par retournement pour l'autre	Forme obtenue
Pavage	

[1] Voici l'adresse d'un site internet où l'on trouvera un très grand nombre d'informations complémentaires et exploitables avec des élèves : http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/graphiq.htm

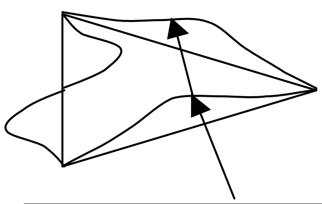
B) Exemple sur une figure ayant un axe de symétrie (Le triangle isocèle)



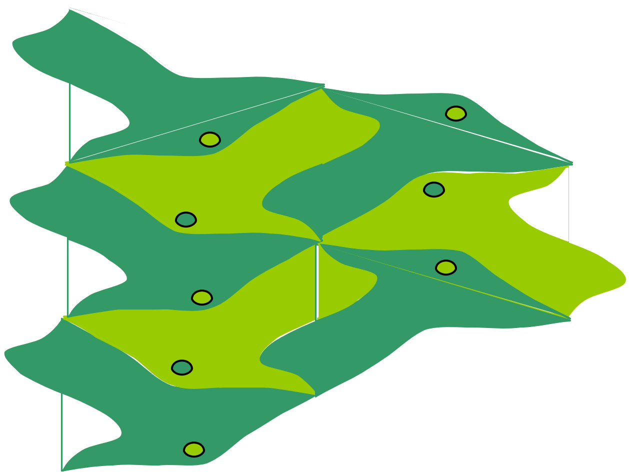
Report avec rotation de 180°

Report par retournement

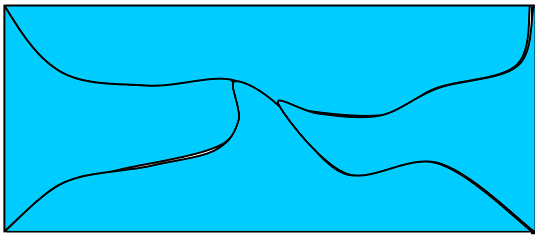
Avec un peu d'imagination :

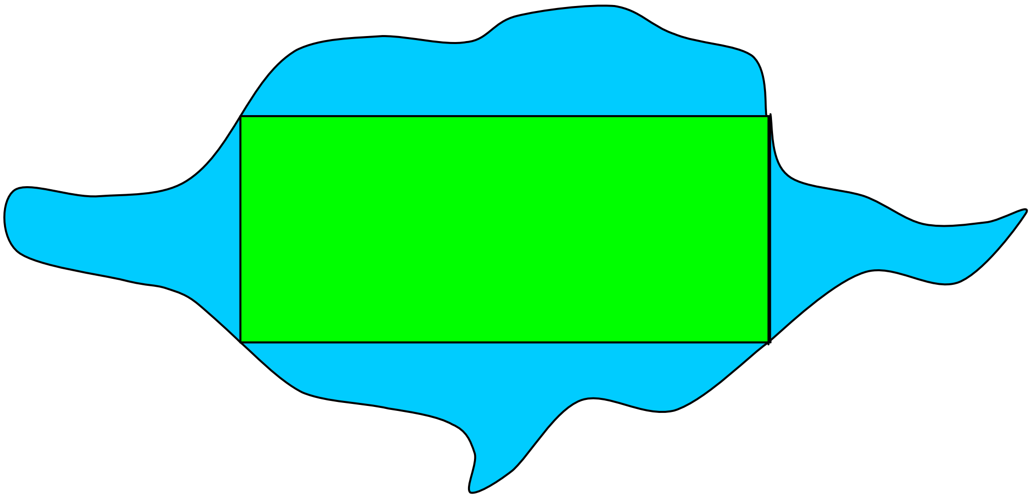


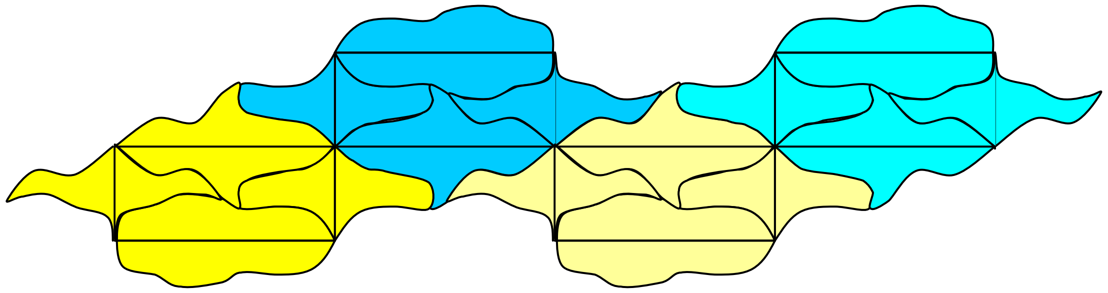
Report avec retournement



La technique de l'enveloppe :

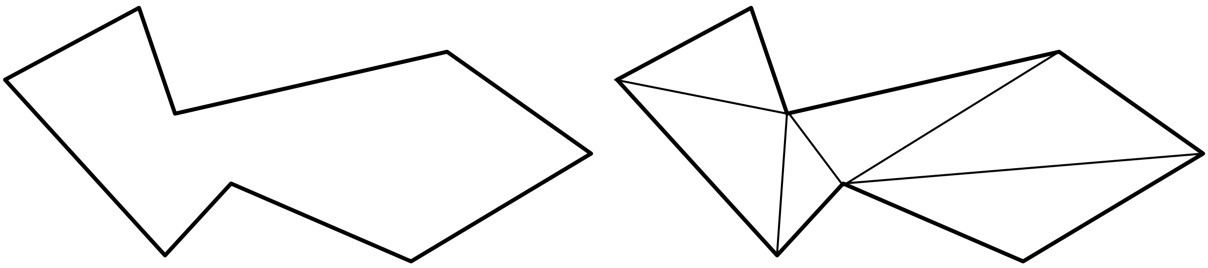






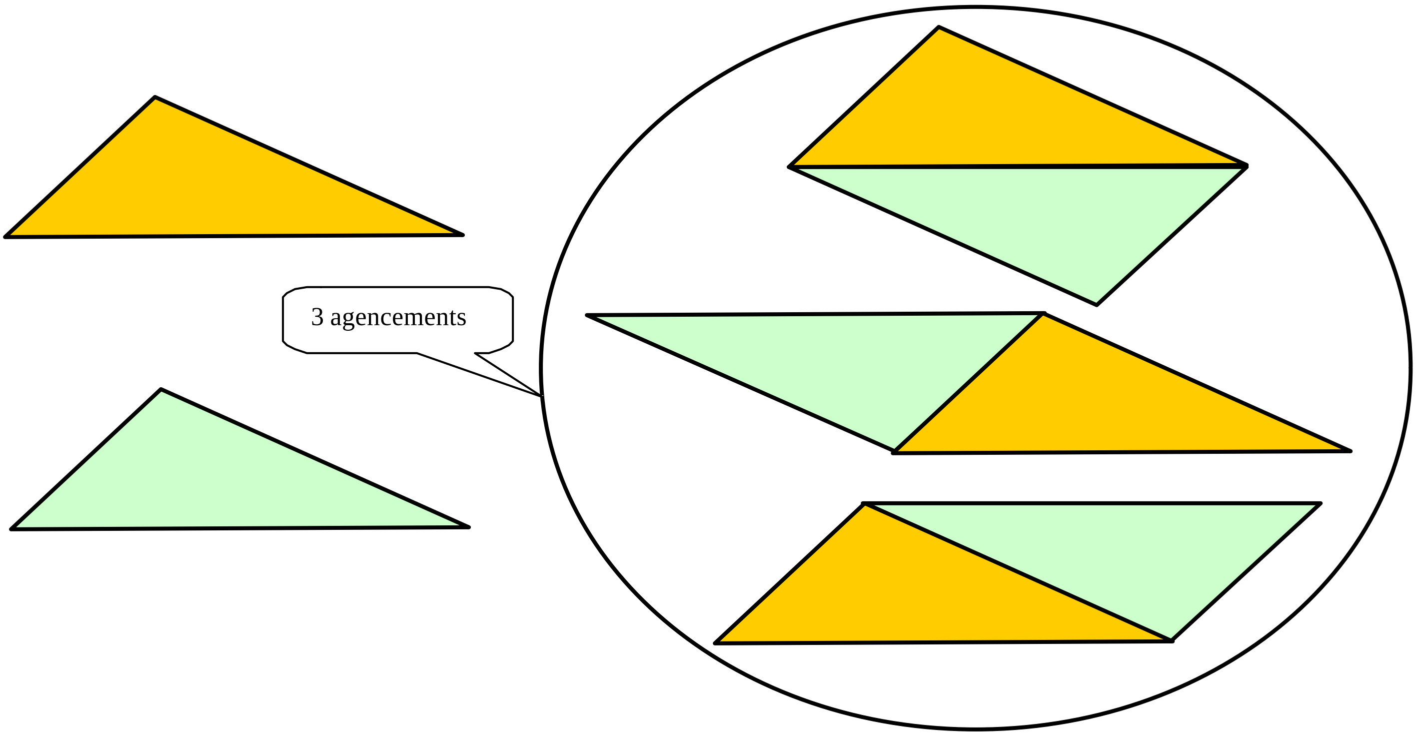
Transformations : Du polygone au carré

I) Décomposition d'un polygone en triangles

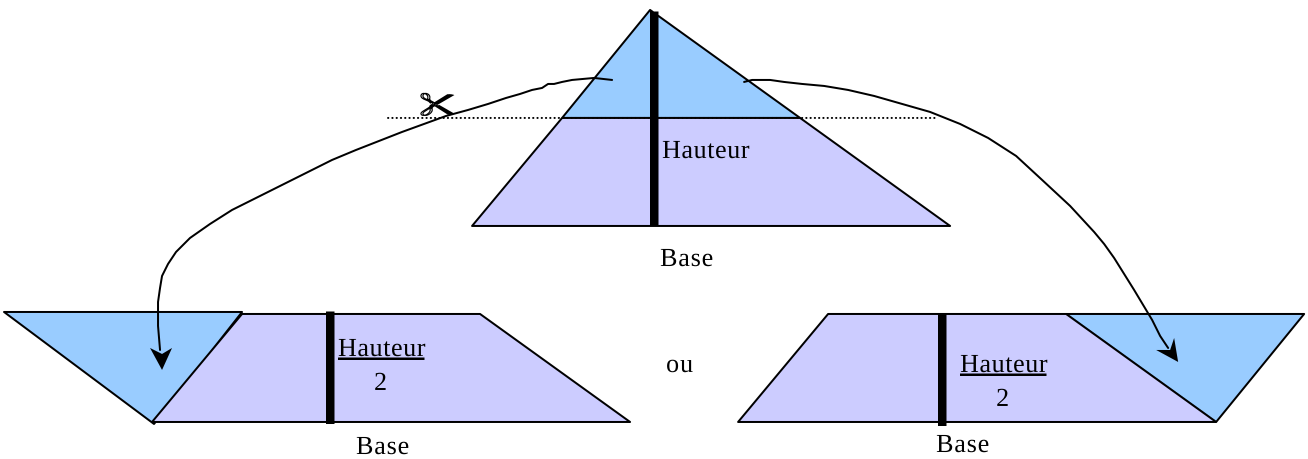


II) Du triangle au parallélogramme

- Construction d'un parallélogramme à partir de 2 triangles identiques. (Fiche 10a)

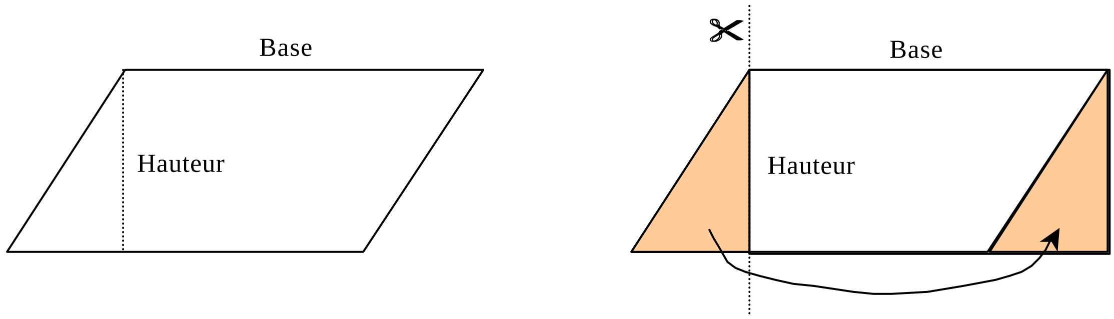


- Construction d'un parallélogramme à partir d'un triangle. (Fiche 10b + annexe)

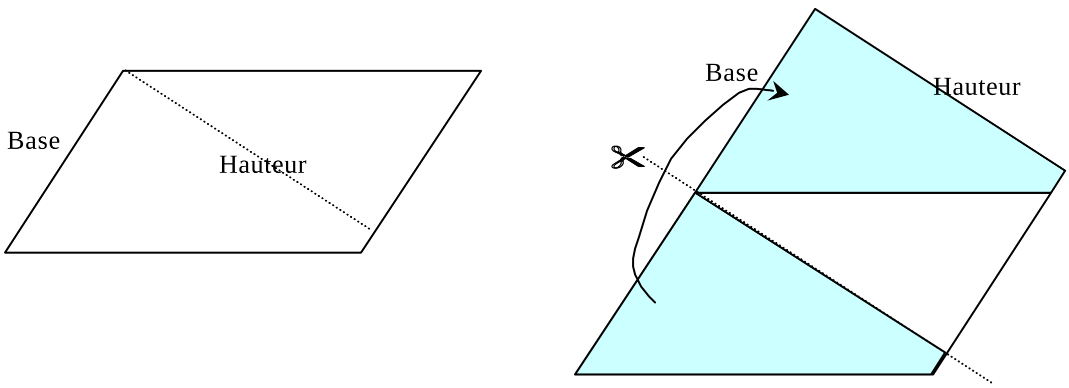


Aire du triangle est égale à celle du parallélogramme « correspondant »

III) Construction d'un rectangle à partir d’un parallélogramme. (Fiche 10c)



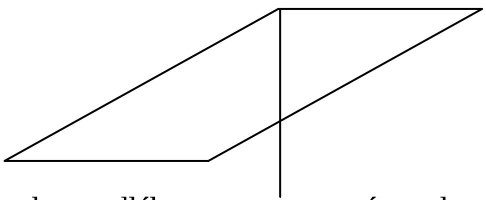
ou



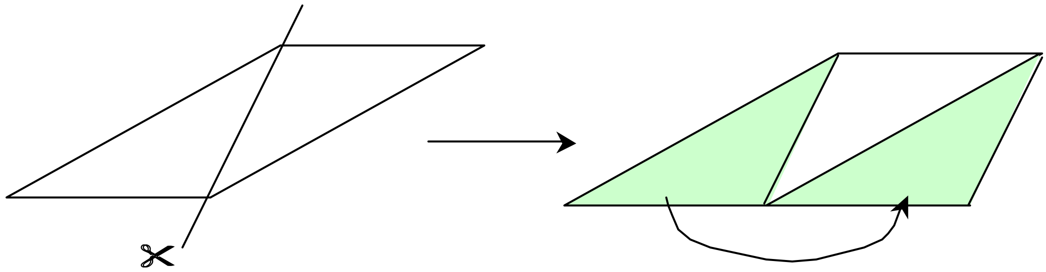
Aire du parallélogramme = Base × Hauteur correspondante

Remarque : cas où le pied d'une hauteur n'appartient pas à un côté.

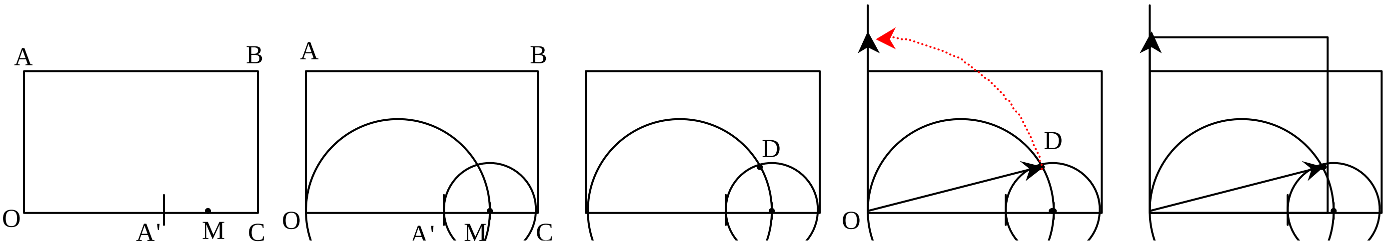
Exemple :



Il suffit de « redresser » le parallélogramme en opérant la transformation suivante (que l’on répètera éventuellement jusqu’à ce que la hauteur soit intérieure).



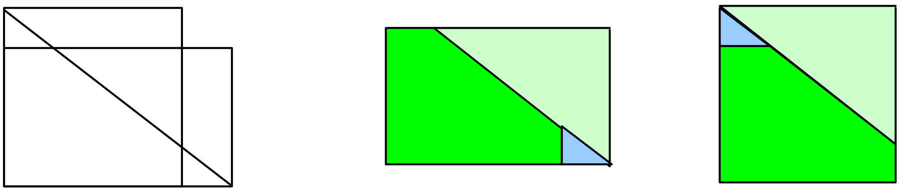
IV) Construction du carré ayant même aire qu'un rectangle donné. (Fiche 10d)



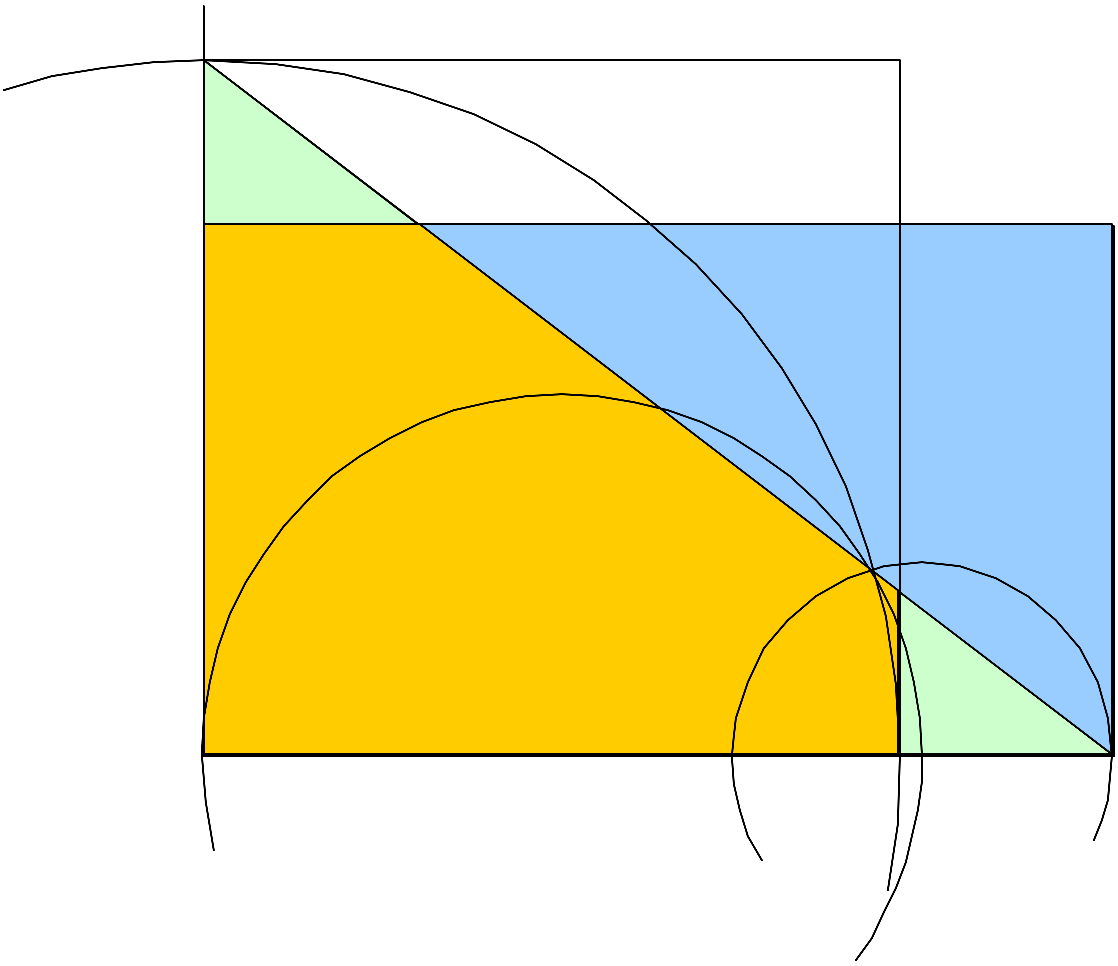
Reporter OA en OA'. Placer M au milieu de A'C	Tracer les cercles de diamètre A'C et OM	D point d'intersection des deux cercles	Reporter OD qui représente le côté du carré ayant même aire que le rectangle OABC

On peut démontrer que $OD = \sqrt{OA \times OC}$

Découpage

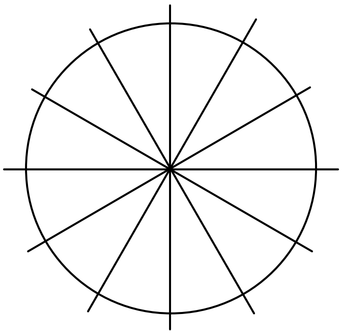


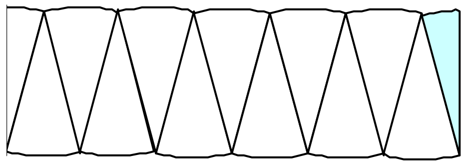
Corrigé de la fiche 10d

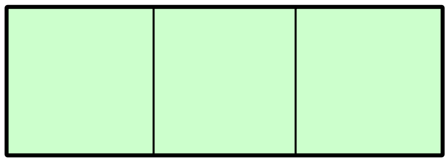


V) Quadrature du cercle

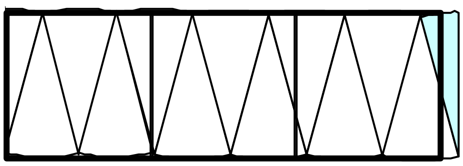
Nous savons qu’une telle transformation est impossible. La transformation proposée permet une approche simple et rapidement assez précise de π.







<u>La superposition</u> fait apparaître
que l’aire du disque
est un peu supérieure
à celle du rectangle constitué
de 3 carrés de côté le rayon du disque

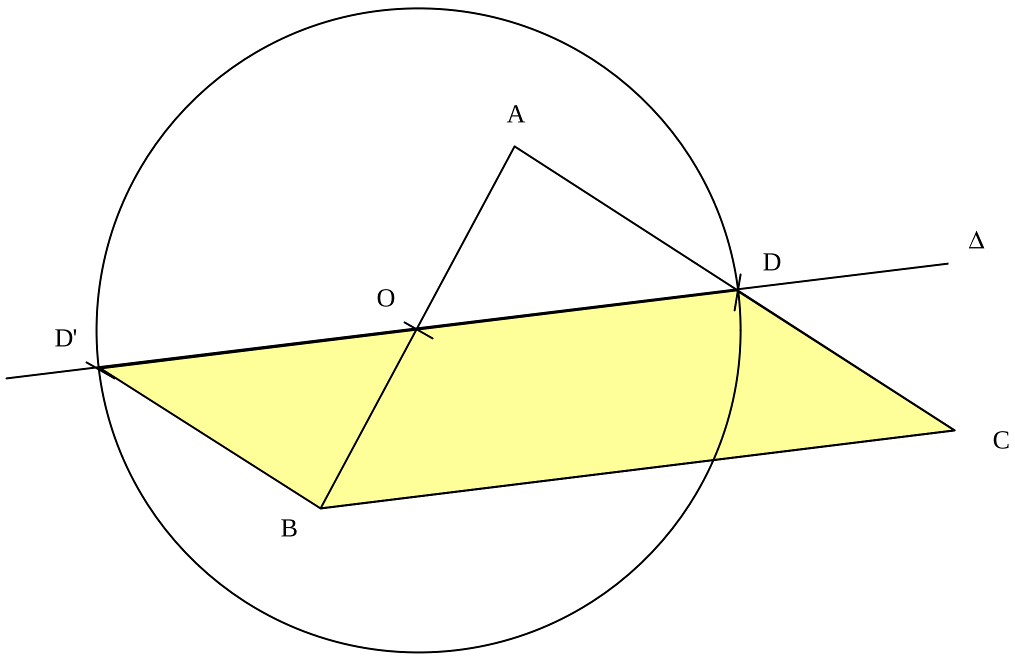


D’où : Aire du disque un peu supérieure à $3\ r^2$.

La formule exacte "Aire du disque = $\pi\ R^2$" ne peut , au niveau collège, qu’être fournie par l’enseignant.

Annexe :
En complément de la fiche 10b, il est possible (selon le niveau des élèves) de démontrer que le découpage-recomposition présenté produit bien un parallélogramme et que ce dernier a la même aire que le triangle initial. Cette démonstration utilisant la symétrie centrale qui occupe une place essentielle dans les programmes actuels, il nous paraît intéressant de la présenter.

Construction :
Soit ABC un triangle quelconque.
Placer le point O milieu de [AB],
Construire la droite Δ parallèle à (BC) et passant par O
Placer le point D intersection de Δ et de [AC]
Placer le point D' symétrique de D par rapport à O



Analyse du quadrilatère D D' B C
1) Par construction (D D') est parallèle à (BC)
2) [B D'] est le symétrique de [AD] par la symétrie centrale de centre le point 0.
Donc (BD') est parallèle à (AD) et donc à (DC)

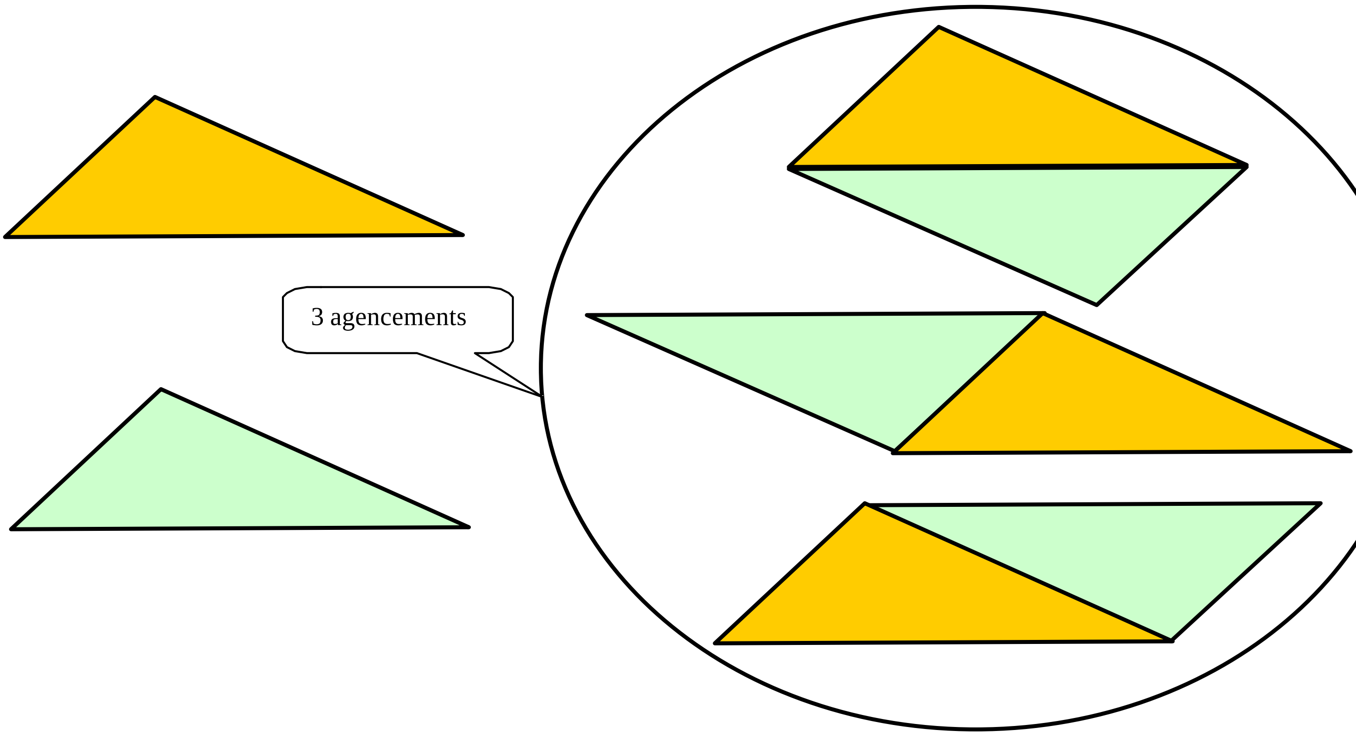
Le quadrilatère D D' B C est un parallélogramme.

Calcul de son aire :
Aire du parallélogramme DD'BC = aire de D'BO + aire de OBCD
Aire du triangle ABC = aire de AOD + aire de OBCD
Or aire de D'BO = aire de OAD car D'BO est le symétrique de AOD par la symétrie centrale de centre le point 0

Donc : aire du parallélogramme D'BCD = aire du triangle ABC

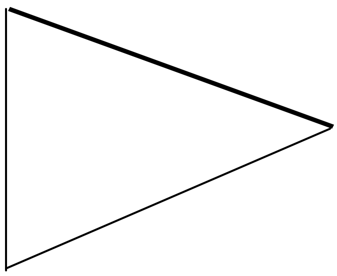
Du triangle au parallélogramme

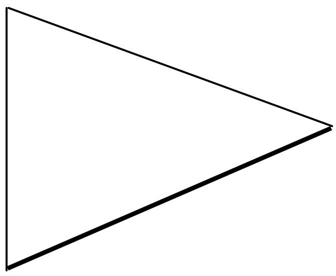
Réalisation d'un parallélogramme à partir de 2 triangles isométriques superposables.

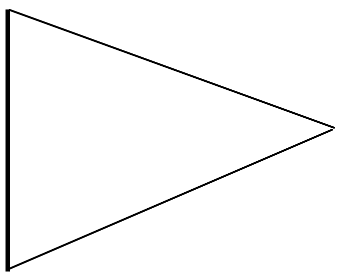


Construire (à la règle et au compas) les 3 parallélogrammes ayant une aire double de celle du triangle suivant

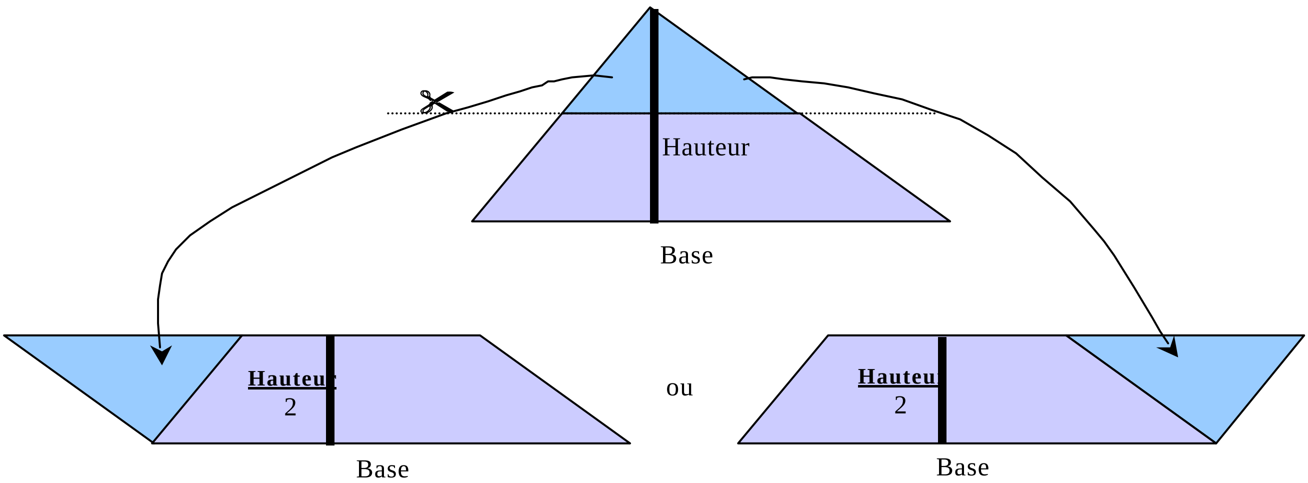
Le côté tracé en gras doit être la diagonale du parallélogramme.



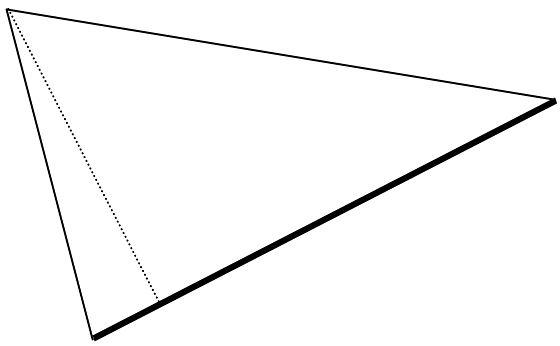


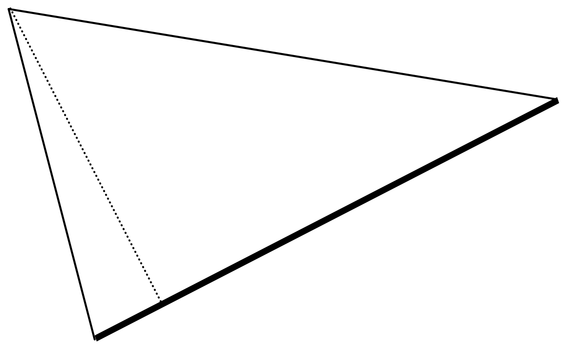


Du triangle au parallélogramme
Réalisation d'un parallélogramme de même aire qu'un triangle donné.



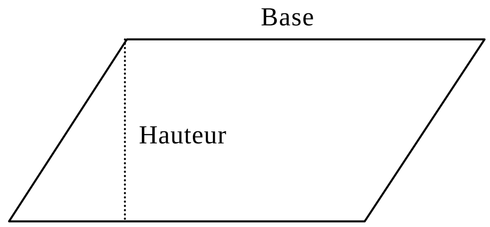
Construire les deux parallélogrammes ayant une aire égale à celle du triangle et correspondant à la base (côté en gras) et à la hauteur (tracée en pointillé) indiquées.

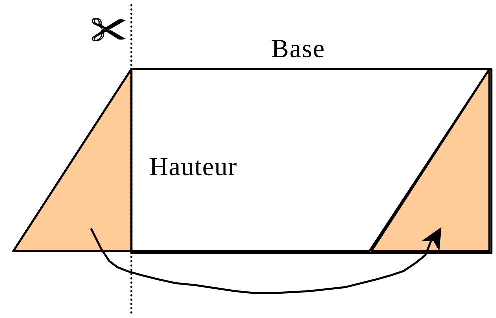




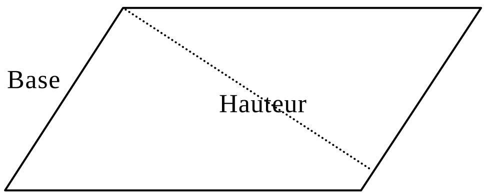
Du parallélogramme au rectangle

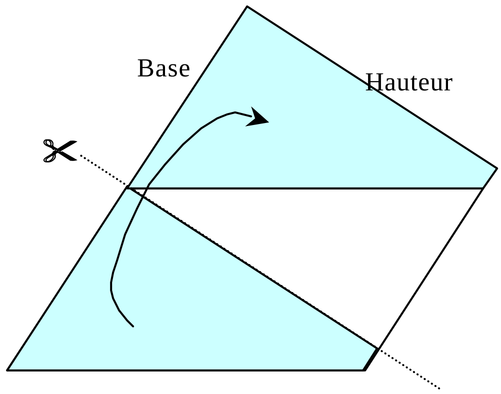
Réalisation d'un rectangle de même aire qu'un parallélogramme donné.



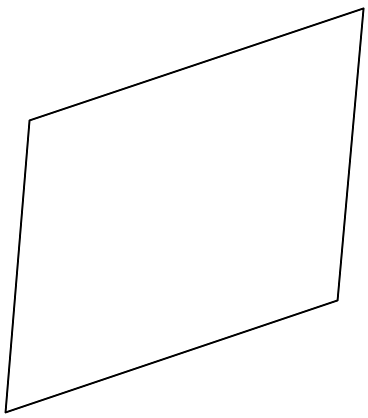


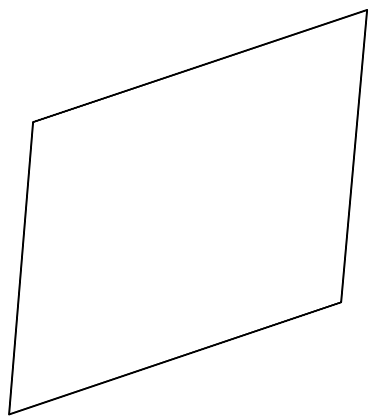
ou



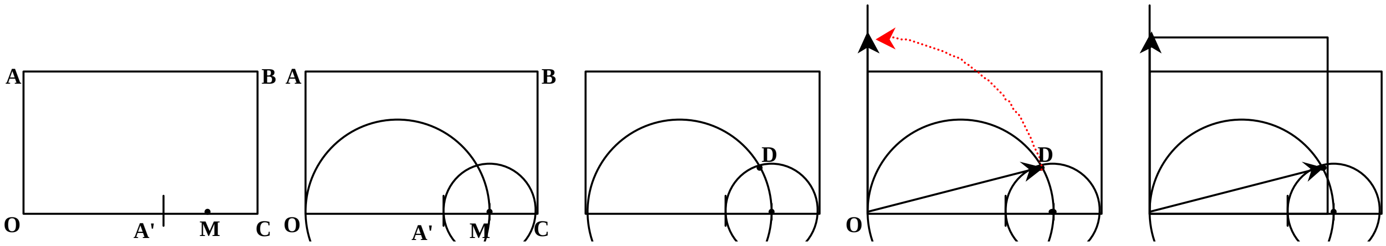


Construire les deux rectangles ayant une aire égale à celle du parallélogramme.



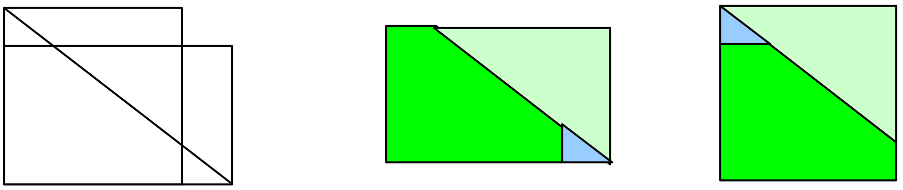


Construction du carré ayant même aire qu'un rectangle donné.

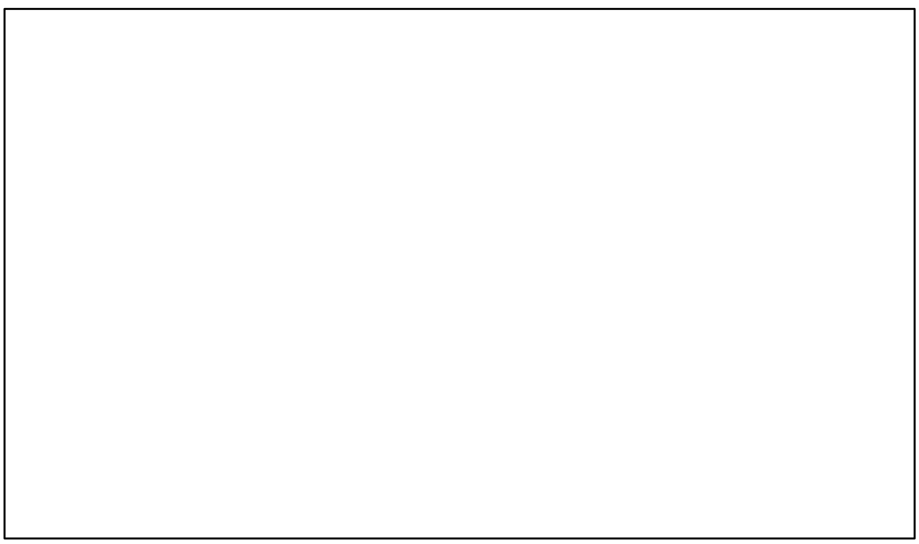


Reporter OA en OA'. Placer M au milieu de [A'C]	Tracer les cercles de diamètre [A'C] et [OM]	D point à l'intersection des deux cercles	Reporter OD qui représente le côté du carré ayant même aire que le rectangle OABC

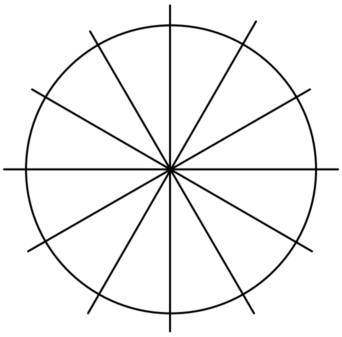
Découpage



Réaliser cette construction à partir du rectangle suivant

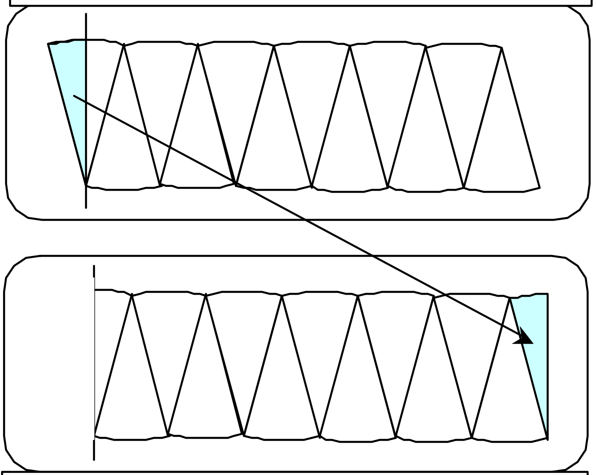


Quadrature du cercle



Découpage d'un disque
en 12 secteurs angulaires

Assemblage en quinconce des 12 secteurs …



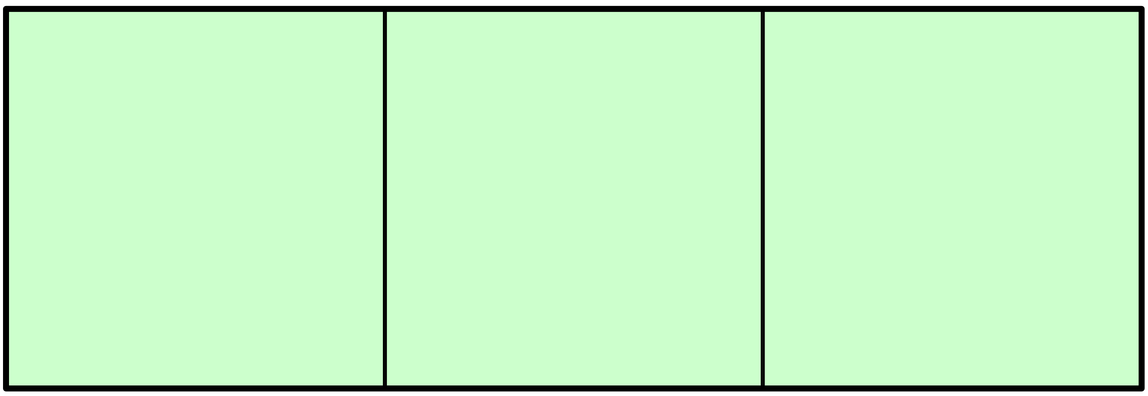
… puis translation de la moitié du premier secteur

Activité :

1) Tracer un cercle de 5 cm de rayon puis le découper en 12 secteurs angulaires

2) Réaliser l'assemblage montré ci-dessus.

3) Comparer l'aire de la forme obtenue à celle du rectangle ci-desous constitué de 3 carrés dont le côté est égal au rayon du cercle.



Conclusion :