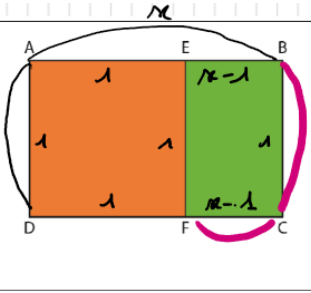


Peut-on trouver les dimensions d'un rectangle afin que celles-ci soient harmonieuses ?

Soit ABCD un rectangle. On place le point E sur le segment [AB] et le point F sur le segment [CD] tel que AEFD soit un carré.

Le rectangle ABCD est un rectangle d'or si le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au rapport de la longueur et de la largeur du rectangle EBCF c'est-à-dire si  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$ .



### Exercise 1:

$$x = \frac{AB}{AD}$$

1.)  $a = AD$  et  $b = EB$  donc  $\frac{AB}{AD} = \frac{AE+EB}{AD}$  or  $AE = AD$  car  $AEDF$  est un carre

donc  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD+EB}{AB} = \frac{a+b}{a}$  (1)

d'autre part  $\frac{BC}{BE} = \frac{1}{6}$  car  $BC = AD$  puisque  $ABCD$  est un rectangle

comme  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$  on a donc  $\frac{a+b}{a} = \frac{1}{b}$  2nd cas Démonstré

d.) puisque  $x$  est le rapport entre la longueur et la largeur de ABCD  
comme la longueur est AB et la largeur est AD

on a donc  $x = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{1}$  donc  $AB = x$

3.) on sait q'u.  $AB = AE + EB$  donc  $EB = AB - AE$

done  $EB = n - 1$

4-) D'après la propriété ③ nous avons  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ , on remplace les valeurs qu'on connaît

done  $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

|     |       |
|-----|-------|
| $x$ | $1$   |
| $1$ | $x-1$ |

ce qui implique que les produits des diagonales sont égaux

$$n(n-1) = 1 \times 1 \quad \text{denn} \quad n \times n - n \times 1 = 1$$

$$\text{also: } x^2 - x = 1 \quad (-1)$$

$$-1 \hookrightarrow \underline{x^2 - x - 1 = 1 - 1}$$

d'où  $x^2 - x - 1 = 0$  (E) Q.E.D

5) nous remplaçons donc  $x$  par  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  dans l'équation (E)

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

vous allez tout mettre en même dénominateur pour simplifier les calculs.

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{x2}{x2} = 1 \times \frac{x4}{x4}$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} - \frac{4}{4} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}) - 4}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

je reconnais un I.R c6 la forme  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  avec  $a=1$  et  $b=\sqrt{5}$

done  $(1+\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$

donc (V) est équivalent à  $6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} - 4$  on regroupe les irrationnels entre eux

$$(V) = \underbrace{6 - 2 - 4}_0 + \underbrace{2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}_0 = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ est bien solution de (E)}$$

Culture : La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Cette suite est fortement liée au nombre d'or,  $\varphi$  (phi).

Voici les 30 premiers termes de la suite de Fibonacci :

$F_0 = 0; F_1 = 1; F_2 = 1; F_3 = 2; F_4 = 3; F_5 = 5; F_6 = 8; F_7 = 13; F_8 = 21; F_9 = 34; F_{10} = 55; F_{11} = 89;$   
 $F_{12} = 144; F_{13} = 233; F_{14} = 377; F_{15} = 610; F_{16} = 987; F_{17} = 1597; F_{18} = 2584; F_{19} = 4181;$   
 $F_{20} = 6765; F_{21} = 10946; F_{22} = 17711; F_{23} = 28657; F_{24} = 46368; F_{25} = 75025; F_{26} = 121393;$   
 $F_{27} = 196418; F_{28} = 317811; F_{29} = 514229; F_{30} = 832040;$

Collège Honoré de Balzac - Paris XVIIème

francois.fatoux@ac-paris.fr

partie 1

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  on a vu dans la partie A que  $\Phi$  est solution de  $x^2 - x - 1 = 0$

1.) Puisque  $\Phi$  est solution de (E) ça veut dire que  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

donc  $\Phi^2 = \Phi + 1$  (1)

d'où  $\Phi^2 - \Phi = 1$  on peut factoriser par  $\Phi$

$\Phi^2 - \Phi = 1 \Rightarrow \Phi(\Phi - 1) = 1$   
 avec  $\Phi \neq 0$   $\frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

Donc  $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$  autrement dit  $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$  Q.E.D

2.)  $\Phi^3 = \Phi \times \Phi^2$  or  $\Phi^2 = \Phi + 1$  donc  $\Phi^3 = \Phi(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi$

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$  or  $\Phi^2 = \Phi + 1$  donc  $\Phi^3 = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$

donc  $\Phi^3 = 2\Phi + 1$  Q.E.D or  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  donc  $2\Phi + 1 = 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$

d'où  $\Phi^3 = 1 + \sqrt{5} + 1 = 2 + \sqrt{5}$

de même  $\Phi^4 = \Phi \times \Phi^3 = \Phi(2\Phi + 1) = 2\Phi^2 + \Phi$  or (1)

donc  $\Phi^4 = 2(\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 2 + \Phi = 3\Phi + 2$  (2)

$\Phi^5 = \Phi \times \Phi^4 = \Phi(3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 2\Phi$  or (1)

donc  $\Phi^5 = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 3\Phi + 3 + 2\Phi = 5\Phi + 3$  (3)

$\Phi^6 = \Phi \times \Phi^5 = \Phi(5\Phi + 3) = 5\Phi^2 + 3\Phi$  or (1)

donc  $\Phi^6 = 5(\Phi + 1) + 3\Phi = 5\Phi + 5 + 3\Phi = 8\Phi + 5$  (4)

On reconnaît Fibonacci :

$1 + 1 = 2$

$2 + 1 = 3$

$3 + 2 = 5$

$5 + 3 = 8$

$8 + 5 = 13$

etc...  $13 + 8 = 21$

3.) conjecture (1)

$\Phi^2 = 1\Phi + 1$   $\Phi^3 = 2\Phi + 1$

$\Phi^4 = 3\Phi + 2$   $\Phi^5 = 5\Phi + 3$

$\Phi^6 = 8\Phi + 5$   $\Phi^7 = 13\Phi + 8$

$\Phi^8 = 21\Phi + 13$

$\Phi^9 = 34\Phi + 21$

$\Phi^{10} = 55\Phi + 34$

Donc  $\Phi^{10} = 55 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + 34 = \frac{55}{2} + 34 + \frac{55\sqrt{5}}{2} = \frac{123}{2} + \frac{55\sqrt{5}}{2}$

vérification à la calculatrice

$\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{10} \approx 122,9918694$

$\frac{123}{2} + \frac{55\sqrt{5}}{2} \approx 122,9918694$

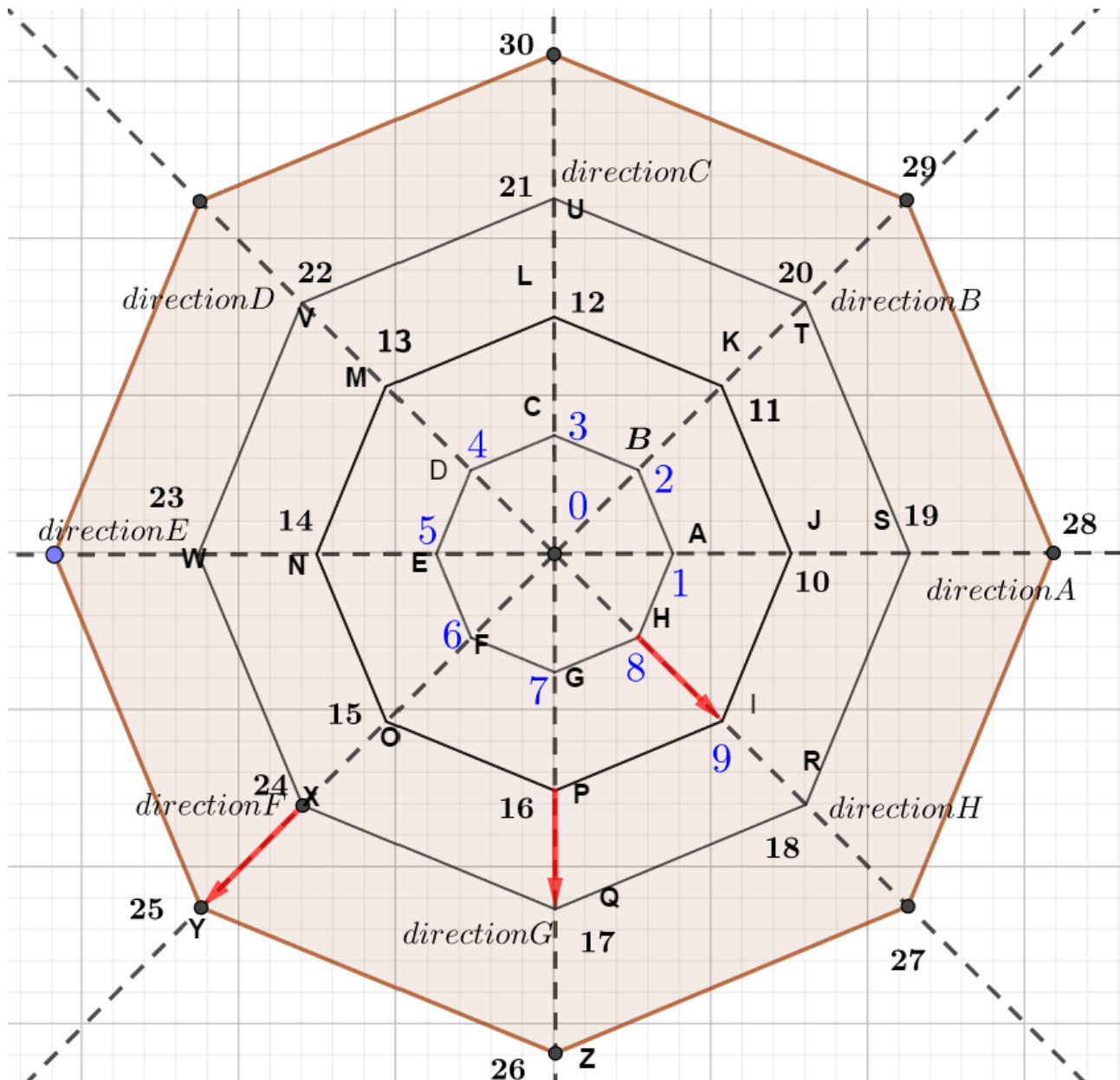
4.) Pour calculer simplement la valeur exacte de  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{15}$  on se sert de la conjecture

$\Phi^{15} = F_{15} \Phi + F_{14}$  donc  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{15} = 610 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + 377$

$\Phi^{15} = 305 + 305\sqrt{5} + 377$   $\Phi^{15} = 305 + 377 + 305\sqrt{5}$

soit  $\Phi^{15} = 682 + 305\sqrt{5} \approx 1364$

**Exercice2 : Cryptographie :**



**Question 1 :** Le premier entier inscrit sur le 4eme octogone est 25, car il y a 8 nombres sur chaque octogone, ainsi on obtient  $3 \times 8 + 1 = 25$

**Question 2 :** Voir figure ci-dessus.

**Question 3 :** Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Ainsi le premier entier inscrit sur le 8eme octogone est  $7 \times 8 + 1 = 57$ . Quelle est sa direction ? Il s'agit de la direction H , car sur le 1<sup>er</sup> octogone on a 8 sur le deuxième on a 9 sur le troisième 18 etc... on rajoute 9 à chaque nouvel octogone Sur le 4eme on a 27 sur le 5eme on a 36 sur le 6eme on a 45 sur le 7eme on a 54

**Applications**

On veut coder un message pour qu'il ne soit pas intelligible pour quelqu'un qui ne connaît pas la clef de chiffrement. Placer les 26 lettres de l'alphabet sur la figure A est sur le 1, B est sur le 2 etc...

**Question 4 :** Coder le mot « OLYMPIADES ».1512251316914519

**Question 5 :** Un élève a obtenu après codage 13120819 quel est le mot qu'il a chiffré ?**MATHS**